Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Ενδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Με ολοκληρώσεις κατά μέρη και αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα:

$$\int x^2 \sin x\,dx,\quad \int x\log x\,dx,\quad \int x^3 e^x\,dx,\quad \int x^3 e^{-x^2}\,dx,\quad \int e^{-x}\sin(3x)\,dx,$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx,\quad \int \cos^2 x\,dx,\quad \int \sin^4 x\,dx,\quad \int x^2\log^2 x\,dx,\quad \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx,$$

$$\int \sin^2 x\sin(5x)\,dx,\quad \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx,\quad \int \arcsin x\,dx,\quad \int \arctan x\,dx,$$

$$\int x\arcsin x\,dx,\quad \int x\arctan^2 x\,dx,\quad \int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx,\quad \int \log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$$

2. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων:

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx,\quad \int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx,\quad \int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx,\quad \int \frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}\,dx,\quad \int \frac{x^2+1}{(2x-1)^3}\,dx,$$

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^4-1}\,dx,\quad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx,\quad \int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,dx,$$

$$\int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^4-2x^2+1}\,dx,\quad \int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx,\quad \int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^4+4x^2+4)}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^4+2x^2+1)}\,dx,\quad \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^4}\,dx,\quad \int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^5+1}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^6+1}\,dx.$$

3. Αν

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy,$$

γράψτε τους τύπους των $I_1,\dots,I_5$.

4. Ορίζουμε

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$$

για $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$. Με κατάλληλες ολοκληρώσεις κατά μέρη, αποδείξτε ότι ισχύει

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

για κάθε $n\geq 2$.
Είναι προφανές ότι $I_0 = \frac{\pi}{2}$ και $I_1 = 1$. Αποδείξτε, με την βοήθεια του προηγούμενου αναδρομικού τύπου, τις σχέσεις:

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},\quad I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3},$$

$$\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2}{(3\cdot 5\cdots(2n-1))^2(2n+1)}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\pi}{2},\quad (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Παρατηρήστε, κατ' ευθείαν από το ολοκλήρωμα, τις σχέσεις

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1}$$

από τις οποίες συνεπάγεται

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

και επομένως

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to 1.$$

Αποδείξτε τον **τύπο του Wallis**:

$$\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n))^2}{(3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1))^2(2n+1)} \to \frac{\pi}{2}.$$

Αποδείξτε και το όριο

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} \to \sqrt{\pi}.$$

5. Υπολογίστε τις τιμές των γεν. ολοκληρωμάτων

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2+x+1}\,dx,$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-|x|}\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,dx, \quad \int_0^1 \log x\,dx, \quad \int_e^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx, \quad \int_e^{+\infty} \frac{1}{x\log^2 x}\,dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$$

6. Ποιά από τα παρακάτω γεν. ολοκληρώματα συγκλίνουν;

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+3}{2x^4+x^2+3}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

7. Αν $0 < a \leq b$, αποδείξτε ότι:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}.$$