Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δηλαδή παίρνοντας $\epsilon > 0$ και υπολογίζοντας κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του ϵ, αποδείξτε ότι

$$\tfrac{1}{n^5} \to 0, \quad \tfrac{1}{10^n} \to 0, \quad \tfrac{1}{n^2+5} \to 0, \quad \tfrac{3n-1}{4n+5} \to \tfrac{3}{4}, \quad \tfrac{1}{n+2\sqrt{n}} \to 0,$$

$$\tfrac{n^2-n+1}{3n^2+2} \to \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2\sqrt{n}+3}{2-3\sqrt{n}} \to -\tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{\cos(2n)+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \to 1.$$

2. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των ορίων, δηλαδή παίρνοντας $M > 0$ και υπολογίζοντας το κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του M, αποδείξτε ότι

$$n^4 \to +\infty, \quad -\sqrt[3]{n} \to -\infty, \quad \log_2 \tfrac{1}{n} \to -\infty,$$

$$n^2 - 3n \to +\infty, \quad \tfrac{n^2-5}{2n+1} \to +\infty, \quad 2^n - n \to +\infty.$$

3. (i) Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = \frac{3+(-1)^n}{2n}$. Αποδείξτε ότι $x_n \to 0$ καθώς και ότι ισχύει $x_n > x_{n+1}$ για κάθε άρτιο n και $x_n < x_{n+1}$ για κάθε περιττό $n \geq 3$.
(ii) Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = \frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}$. Αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$ καθώς και ότι ισχύει $x_n > x_{n+1}$ για κάθε άρτιο n και $x_n < x_{n+1}$ για κάθε περιττό n.

4. Αποδείξτε ότι:

$$(1-n)^5 + n^4 \to -\infty, \quad \tfrac{3n^2-5n}{5n^2+2n-6} \to \tfrac{3}{5}, \quad \tfrac{-2n^5+4n^2}{3n^7+n^3-10} \to 0, \quad \tfrac{3n^2+4n}{2n-1} \to +\infty,$$

$$\tfrac{2n-4n^5-1}{7n^4+n^3+2} \to -\infty, \quad \big(\tfrac{-n^2+1}{3n+1}\big)^{27} \to -\infty, \quad \big(\tfrac{-n^2+1}{3n+1}\big)^{16} \to +\infty,$$

$$\tfrac{n(n+1)}{n+4} - \tfrac{4n^3}{4n^2+1} \to -3, \quad \big(\tfrac{n(n+1)}{n+2} - \tfrac{n^3}{n^2+1}\big)^3 \to -1, \quad \tfrac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(n+2)^{106}} \to 1,$$

$$\tfrac{(n-1)^2-7n+3\sqrt{n+1}}{n+1} \to +\infty, \quad \tfrac{n-(n+3)^2-7n\sqrt{n}}{(n+1)(\sqrt{n}+1)^2} \to -1,$$

$$\tfrac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} \to \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}} \to \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} \to 3, \quad \tfrac{5^n-3^{n+7}}{2^{n-1}-5^{n+2}} \to -\tfrac{1}{25},$$

$$\tfrac{3-(\log_2 n)^3}{1+\log_2 n+(\log_2 n)^2} \to -\infty, \quad \tfrac{2+\log(n\sqrt{n})}{7-2\log n} \to -\tfrac{3}{4}, \quad \tfrac{\log_2 n+3}{-2\log_4 n+15} \to -1,$$

$$\sqrt{n^2+n} - n \to \tfrac{1}{2}, \quad \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} \to \tfrac{1}{2}, \quad \big(n + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}\big)^9 \to +\infty,$$

$$\tfrac{-n^2+1}{2n^2+(-1)^{n-1}n} \to -\tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{-n^2+1}{2n+(-1)^{n-1}} \to -\infty, \quad \tfrac{n+(-1)^n}{n^2+3n\log_{10} n} \to 0,$$

$$2n + (-1)^{n-1}n \to +\infty, \quad 3n - 2n\sin n \to +\infty, \quad n\sin n - 2n \to -\infty,$$

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} \to 2, \quad \tfrac{2^7}{3^7} + \tfrac{2^8}{3^8} + \cdots + \tfrac{2^n}{3^n} \to \tfrac{2^7}{3^6},$$

$$\tfrac{2^n}{3^n} + \tfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + \cdots + \tfrac{2^{2n}}{3^{2n}} \to 0, \quad \tfrac{1+2+\cdots+2^n}{1+3+\cdots+3^n} \to 0, \quad \tfrac{(1+2+2^2+\cdots+2^n)^2}{1+4+4^2+\cdots+4^n} \to 3,$$

$$\tfrac{1}{1+2}\,\tfrac{2}{2+2}\,\tfrac{3}{3+2}\cdots\tfrac{n-1}{n+1}\,\tfrac{n}{n+2} \to 0, \quad \tfrac{2-1}{2+1}\,\tfrac{3-1}{3+1}\cdots\tfrac{n-1}{n+1} \to 0, \quad \tfrac{2^3-1}{2^3+1}\,\tfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\tfrac{n^3-1}{n^3+1} \to \tfrac{2}{3},$$

$$\tfrac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1, \quad \big[\tfrac{3n^2-n+1}{n+2}\big] \to +\infty, \quad \tfrac{n+2}{3n^2-n+1}\big[\tfrac{3n^2-n+1}{n+2}\big] \to 1,$$

$$\sqrt[n]{n^3} \to 1, \quad \sqrt[n]{n^2+3n+1} \to 1, \quad \sqrt[n]{n^4+3n^2+n+1} \to 1,$$

$$\sqrt[n]{2^n+3^n} \to 3, \quad \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n} \to 5, \quad \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n+7^n} \to 7,$$

$$(1-\tfrac{1}{n^2})^n \to 1, \quad (1-\tfrac{1}{n})^{n^2} \to 0, \quad (1+\tfrac{1}{n})^{n^2} \to +\infty, \quad (1+\tfrac{1}{n^2})^n \to 1.$$

5. Έστω $x_n \neq -1$ για κάθε n και $x \neq -1$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\frac{x_n}{1+x_n} \to \frac{x}{1+x}$.

6. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών με τους εξής n-οστους όρους:
$$1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n, \quad 1 - \tfrac{3}{2} + \tfrac{3^2}{2^2} - \cdots + (-1)^n \tfrac{3^n}{2^n},$$
$$\tfrac{n^3-3}{2n+1}(-2)^n, \quad 2^n + 3^n(-1)^{n-1}, \quad (2^n + n)(-1)^{n-1} + 2^n - n.$$

7. Αποδείξτε ότι
$$\tfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} \to \begin{cases} 1 & \text{αν } |x| > 1 \\ 0 & \text{αν } |x| = 1 \\ -1 & \text{αν } |x| < 1 \end{cases} \qquad [nx] - [ny] \to \begin{cases} +\infty & \text{αν } x > y \\ 0 & \text{αν } x = y \\ -\infty & \text{αν } x < y \end{cases}$$

8. (i) Αν $\frac{\log_{10} n - 2}{2\log_{10} n + 4} < x_n < \frac{3+n}{1+2n}$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to \frac{1}{2}$.
(ii) Αν $n^2 - 2n < n^2 x_n \leq n^2 + 3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.
(iii) Αν $n + 1 \leq 2nx_n \leq n + 2x_n + 3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to \frac{1}{2}$.
(iv) Αν $n^2 x_n^2 - 2n(n-1)x_n + n^2 - 2n - 3 \leq 0$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.

9. Για κάθε a αποδείξτε ότι $\frac{[a]+[2a]+\cdots+[na]}{n^2} \to \frac{a}{2}$.

10. (i) Αποδείξτε ότι $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n-1} + \frac{n}{n^2+n} \to 1$.
(Υπόδειξη: $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$ για κάθε k με $1 \leq k \leq n$.)
(ii) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 1$.

11. Το **κριτήριο λόγου** για ακολουθίες. Έστω $x_n > 0$ για κάθε n.
(i) Αν $0 < a < 1$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq a$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.
(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $0 < x_n \leq a^{n-1}x_1$ για κάθε n.)
Αν $a > 1$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq a$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
(ii) Αν $0 \leq a < 1$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$ αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.
Αν $a > 1$ και $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$ αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
(iii) Τα παρακάτω όρια μπορείτε να τα δείτε ως εφαρμογές των (i), (ii).
Αν $a > 1$ και $b > 0$ αποδείξτε ότι $\frac{a^n}{n^b} \to +\infty$.
Αποδείξτε ότι $\frac{a^n}{n!} \to 0$ και $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \to +\infty$.

12. Έστω ότι η άγνωστη ακολουθία (x_n) *έχει* όριο.
(i) Αν $x_{n+1} = -x_n + 2$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.
(ii) Αν $x_{n+3} = x_n - 3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to -\infty$.
(iii) Αν $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to -1$ ή $x_n \to 2$ ή $x_n \to +\infty$.
(iv) Αν $x_{n+2} = -x_n^2 + 2$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$ ή $x_n \to -2$ ή $x_n \to -\infty$.
(v) Αν $x_{n+1} = x_n^2 + 3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
(vi) Αν $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n^3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 0$ ή $x_n \to +\infty$ ή $x_n \to -\infty$.
Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις προσπαθήστε να βρείτε συγκεκριμένη ακολουθία η οποία να την υλοποιεί.

13. (i) Έστω ότι $x_n \to +\infty$ και ότι η (y_n) είναι κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n + y_n \to +\infty$.
(ii) Έστω ότι $x_n \to -\infty$ και ότι η (y_n) είναι άνω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n + y_n \to -\infty$.
(iii) Έστω $x_n \to +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η (y_n) έχει κάποιο *θετικό* κάτω φράγμα. Αποδείξτε ότι $x_n y_n \to +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.
(iv) Έστω $x_n \to +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η (y_n) έχει κάποιο *αρνητικό* άνω φράγμα. Αποδείξτε ότι $x_n y_n \to -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

14. (i) Βρείτε (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n + y_n)$ να έχει όριο.
    (ii) Βρείτε (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n y_n)$ να έχει όριο.

15. Βρείτε (x_n), (y_n) με *θετικούς* όρους ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η $(x_n y_n)$ να μην έχει όριο.

16. Ποιό λάθος γίνεται στους παρακάτω συλλογισμούς;
    (i) $\lim_{n\to+\infty}(n\,\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty}(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n}) = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n} = 0.$
    (ii) $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{(1 + \frac{1}{n}) \cdots (1 + \frac{1}{n})}_{n} = \underbrace{1 \cdots 1}_{n} = 1.$