Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Αποδείξτε ότι:
$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+3}\to e,\quad \left(1+\tfrac{1}{n+2}\right)^{n}\to e,\quad \left(1+\tfrac{1}{n+2}\right)^{3n+5}\to e^3,$$
$$\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{n}\to e^{-1},\quad \left(1+\tfrac{2}{n}\right)^{n}\to e^{2},\quad \left(1-\tfrac{2}{n}\right)^{n}\to e^{-2},\quad \left(1+\tfrac{5}{n}\right)^{n}\to e^{5}.$$

2. Έστω $0<x_1<1$ και $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n\to 0$.

3. Έστω $x_1=1$ και $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n^2}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και ότι $x_n\to+\infty$.

4. Έστω $3x_{n+1}=x_n^2+2$ για κάθε n.
(i) Αν $0\le x_1<1$ αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και $x_n\to 1$.
(ii) Αν $1<x_1<2$ αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και $x_n\to 1$.
(iii) Αν $x_1>2$ αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και $x_n\to+\infty$.
(iv) Τί γίνεται αν $x_1=1$ ή αν $x_1=2$;

5. Έστω $x_1\ge 0$ και $4x_{n+1}=x_n^2+3$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι ανάλογα με την τιμή του x_1 η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Αποδείξτε ότι αν η (x_n) δεν είναι σταθερή (3) (οπότε θα είχε όριο 3) τότε τα μόνα πιθανά όριά της είναι το 1 και το $+\infty$.
(Υπόδειξη: Προσπαθώντας να αποδείξετε την μονοτονία της (x_n) θα δείτε ότι οι όροι της πρέπει να ανήκουν σε συγκεκριμένα διαστήματα. Διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς την θέση του x_1 σε σχέση με αυτά τα διαστήματα προσδιορίστε με επαγωγή την θέση όλων των όρων της ακολουθίας σε σχέση με αυτά. Κατόπιν αποδείξτε την μονοτονία της ακολουθίας. Οι περιπτώσεις μοιάζουν με τις περιπτώσεις της προηγούμενης άσκησης.)

6. Έστω $7x_{n+1}=x_n^3+6$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι ανάλογα με την τιμή του x_1 η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Αποδείξτε ότι αν η (x_n) δεν είναι σταθερή (-3) ή σταθερή (2) (οπότε θα είχε όριο -3 ή 2, αντιστοίχως) τότε τα μόνα πιθανά όριά της είναι το $-\infty$, το 1 και το $+\infty$.

7. Έστω $x_1>0$ και $x_{n+1}=\frac{6+6x_n}{7+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι ανάλογα με την τιμή του x_1 η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και ότι $x_n\to 2$.

8. Έστω $x_{n+1}=1+\frac{6}{x_n}$ για κάθε n.
(i) Αν $0<x_1<3$ αποδείξτε ότι η υπακολουθία (x_{2k-1}) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και η (x_{2k}) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n\to 3$.
(ii) Τί γίνεται αν $x_1>3$ ή αν $x_1=3$;

9. Έστω $x_1>0$ και $x_{n+1}=1+\frac{2}{x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η μία από τις υπακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η άλλη είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $x_n\to 2$.

10. Έστω $a>0$, $x_1>0$ και $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι από τον δεύτερο όρο της και πέρα φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n\to\sqrt{a}$.

11. Έστω (x_n), (y_n) ώστε $0<x_1\le y_1$ και $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$ και $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, ότι η (y_n) είναι φθίνουσα και ότι $x_n\le y_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν και ότι έχουν το ίδιο όριο.

12. Αποδείξτε ότι η $\left((1+\frac{1}{n})^{n+1}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και ότι $(1+\frac{1}{n})^{n+1}\to e$.