Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Υπολογίστε τις παραγώγους των

$$x^2-3x+1-\tfrac{x^3+2}{x^2+1}, \qquad \tfrac{x^3-x+4\sin x}{x^2+\sin x+2}, \qquad \sin x+\tan x,$$

$$\sin(x^n), \qquad \tan^n x, \qquad \tan(x^n), \qquad \sqrt[n]{1+\cos x}, \qquad \tfrac{\sin^3 x-3\sin^2 x}{\sin^2 x+4}.$$

2. Από τον τύπο

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\tfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

βρείτε με παραγωγίσεις ανάλογους τύπους για τα αθροίσματα

$$x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n, \quad x+4x^2+9x^3+\cdots+n^2x^n.$$

3. Σχεδιάστε τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων, αφού πρώτα βρείτε τα πεδία ορισμού τους και τις απλοποιήσετε.

$$\sin(\arcsin x), \quad \sin(\arccos x), \quad \sin(\arctan x), \quad \cos(\arccos x), \quad \cos(\arcsin x),$$

$$\cos(\arctan x), \quad \tan(\arcsin x), \quad \tan(\arccos x), \quad \tan(\arctan x), \quad \arcsin(\sin x),$$

$$\arccos(\cos x), \quad \arctan(\tan x), \quad \arcsin(\cos x), \quad \arccos(\sin x).$$

Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων με δύο τρόπους: με τον κανόνα αλυσίδας αλλά και από τους απλοποιημένους τύπους τους.

4. Έστω ότι οι $f_1,\ldots,f_n$ είναι όλες παραγωγίσιμες στο ξ και καμία δεν έχει τιμή 0 στο ξ. Αν $g=f_1\cdots f_n$ αποδείξτε ότι

$$\tfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}=\tfrac{f_1'(\xi)}{f_1(\xi)}+\cdots+\tfrac{f_n'(\xi)}{f_n(\xi)}.$$

5. Αν οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο ξ βρείτε το

$$\lim_{x\to\xi}\tfrac{f(x)g(\xi)-f(\xi)g(x)}{x-\xi}.$$

6. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα διάστημα (a,b) και καμία ρητή συνάρτηση $r(x)$ ώστε να ισχύει $r'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in(a,b)$.

7. Αποδείξτε ότι η παράγωγος άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση και η παράγωγος περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η παράγωγος περιοδικής συνάρτησης είναι περιοδική συνάρτηση.

8. Έστω ότι το ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$, δηλαδή $p(\xi)=0$. Λέμε ότι ο φυσικός k είναι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα του $p(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $q(x)$ ώστε να ισχύει $p(x)=(x-\xi)^k q(x)$ για κάθε x και $q(\xi)\neq 0$. Το ότι $q(\xi)\neq 0$ ισοδυναμεί με το ότι το πολυώνυμο $q(x)$ δεν διαιρείται από το $x-\xi$. Άρα η πολλαπλότητα της ρίζας ξ του πολυωνύμου $p(x)$ είναι ο μέγιστος φυσικός k ώστε το $(x-\xi)^k$ να διαιρεί το $p(x)$. Αν το ξ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$, δηλαδή $p(\xi)\neq 0$, επεκτείνουμε τον ορισμό της έννοιας της πολλαπλότητας, λέγοντας ότι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα του $p(x)$ είναι 0. Είναι προφανές ότι η πολλαπλότητα μίας ρίζας πολυωνύμου δεν υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου.
Έστω ότι το ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$. Αποδείξτε ότι το ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας k του $p(x)$ αν και μόνο αν είναι ρίζα πολλαπλότητας $k-1$ του $p'(x)$.

9. Θεωρούμε πολυώνυμα $p(x)$ και $q(x)$, όπου το $p(x)$ έχει βαθμό $n \geq 2$ και n διαφορετικές ανά δύο ρίζες $x_1, \ldots, x_n$ και το $q(x)$ έχει βαθμό $\leq n-1$. Δηλαδή $p(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ με $a_n \neq 0$ και $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.
(i) Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{q(x_k)}{p'(x_k)(x-x_k)}$$

για κάθε $x \neq x_1, \ldots, x_n$.
(ii) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q(x_k)}{p'(x_k)} = \frac{b_{n-1}}{a_n}.$$