Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Ένατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση
$$\begin{cases} x^2 & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$
είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά ότι δεν έχει δεύτερη παράγωγο στο 0.
Διατυπώστε το ανάλογο συμπέρασμα για τις τρεις πρώτες παραγώγους της συνάρτησης
$$\begin{cases} x^3 & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

2. Βρείτε για κάθε n τις n-οστές παραγώγους των συναρτήσεων
$$\tfrac{x+2}{x^2-1}, \quad \tfrac{x+1}{(x-1)^2}, \quad \tfrac{x^3}{x^2-1}, \quad \sin(5x)\sin(7x).$$

3. Μπορείτε να υπολογίσετε το
$$\lim_{x \to +\infty} \tfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl; Μήπως το όριο αυτό υπολογίζεται πολύ εύκολα χωρίς αναφορά στον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl;

4. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του l' Hopitâl, βρείτε τα όρια
$$\lim_{x \to 2} \tfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}, \quad \lim_{x \to 1} \tfrac{x^{7/3}-1}{x^{4/7}-1}, \quad \lim_{x \to 0} \tfrac{2^x-1}{3^x-1}, \quad \lim_{x \to 0} \tfrac{e^x-1}{\tan x}, \quad \lim_{x \to 0} \tfrac{\log(1+x)}{e^{2x}-1},$$
$$\lim_{x \to 0} \tfrac{\sin x}{\arctan x}, \quad \lim_{x \to 0} \tfrac{\arctan x}{\tan x}, \quad \lim_{x \to 1} \tfrac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2-x}}, \quad \lim_{x \to 0} \tfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4},$$
$$\lim_{x \to 0} \tfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}, \quad \lim_{x \to 0} \tfrac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}, \quad \lim_{x \to 0} \tfrac{\arcsin x - \sin x}{\tan x - \arctan x},$$
$$\lim_{x \to +\infty} \tfrac{\log(\log x)}{\log x}, \quad \lim_{x \to +\infty} \tfrac{\log(\log(\log x))}{\log(\log x)}, \quad \lim_{x \to 0} (\tfrac{1}{e^x-1} - \tfrac{1}{x}), \quad \lim_{x \to 0} (\tfrac{1}{\log(1+x)} - \tfrac{1}{x}),$$
$$\lim_{x \to 0} (\tfrac{1}{\sin x} - \tfrac{1}{x}), \quad \lim_{x \to 0} (\cot x - \tfrac{1}{x}), \quad \lim_{x \to 0+} \sin x \log x,$$
$$\lim_{x \to 1+} \log x \log(x-1), \quad \lim_{x \to 0+} x^{\sin x}, \quad \lim_{x \to +\infty} \tfrac{x(x^{1/x}-1)}{\log x}, \quad \lim_{x \to 0} (x+e^x)^{1/x},$$
$$\lim_{x \to 0} \tfrac{e-(1+x)^{1/x}}{x}, \quad \lim_{x \to 0+} x^{x^x-1}, \quad \lim_{x \to +\infty} \big(\cos \tfrac{2}{\sqrt{x}}\big)^x, \quad \lim_{x \to 0} (\tan(x+\tfrac{\pi}{4}))^{\cot(2x)}.$$

5. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών με n-οστους όρους
$$\tfrac{\log^{13} n}{n^2}, \quad n^3 e^{-n}, \quad \tfrac{\log(\log n)}{\log n}, \quad \tfrac{\log(\log(\log n))}{\log(\log n)}, \quad n - \cot \tfrac{1}{n}, \quad n^{\sin(1/n)}.$$

6. Βρείτε αριθμούς a, b ώστε
$$\lim_{x \to 0} \big(\tfrac{1-\cos x}{x^4} + \tfrac{a}{x^2} + b\big) = 0.$$

7. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε τα όρια
$$\lim_{x \to 0} \tfrac{e^x - (1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n)}{x^{n+1}}, \quad \lim_{x \to 0} \tfrac{\log(1+x) - (x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n)}{x^{n+1}}.$$

8. Να σχεδιαστούν τα γραφήματα των συναρτήσεων

$$x^3 - 3x^2 + 6x, \quad x^2(x-1)^2, \quad \tfrac{x}{x+1}, \quad \tfrac{1}{\log x}, \quad \sin x,$$

$$xe^{-x}, \quad xe^{-x^2}, \quad x\log x, \quad \tfrac{\log x}{x}, \quad x^{1/x}, \quad x^x,$$

βρίσκοντας τα διαστήματα στα οποία είναι μονότονες, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες, τα σημεία (τοπικού) μεγίστου και (τοπικού) ελαχίστου, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες ευθείες (κατακόρυφες και πλάγιες).

9. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα I και έστω $x_1, x_0, x_2 \in I$ με $x_1 < x_0 < x_2$. Αν το σημείο $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται *πάνω* στο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ αποδείξτε ότι το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.

10. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν $f(a) = f(b) = 0$ και $f(c) > 0$ για κάποιο $c \in (a, b)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f''(\xi) < 0$.

11. Έστω $a < b$. Θεωρήστε το πολυώνυμο

$$p(x) = (x-a)^n (x-b)^n.$$

Αποδείξτε ότι η n-οστή παράγωγος $p^{(n)}$ είναι πολυώνυμο βαθμού n, ότι έχει ακριβώς n διαφορετικές ρίζες και ότι όλες αυτές οι ρίζες ανήκουν στο διάστημα (a, b).

12. Αν η f είναι κυρτή και άνω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ αποδείξτε με γεωμετρικό και με μαθηματικό τρόπο ότι είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$.

13. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα ή κοιλότητα σχετικών συναρτήσεων αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:
(i) $(\frac{x_1+x_2}{2})^a \leq \frac{x_1^a + x_2^a}{2}$ για $0 \leq x_1 < x_2$ και $a \geq 1$.
(ii) $(\frac{x_1+x_2}{2})^a \geq \frac{x_1^a + x_2^a}{2}$ για $0 \leq x_1 < x_2$ και $0 < a \leq 1$.
(iii) $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}$ για $x_1 < x_2$.
(iv) $\log \frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{\log x_1 + \log x_2}{2}$ για $0 < x_1 < x_2$.

14. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και έστω

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \eta.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \eta.$$

15. Έστω παραγωγίσιμη $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και έστω

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = \eta$$

με $\eta \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$