Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Γράψτε παραμετρική και καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας στον $\mathbb{R}^2$ η οποία περιέχει το σημείο $(-1, 3)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

2. Γράψτε παραμετρική και καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ το οποίο περιέχει το σημείο $(-1, 1, 2)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο το οποίο παράγεται από τα διανύσματα $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ και $3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

3. Για να βρούμε δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ στον $\mathbb{R}^3$ τα οποία να είναι κάθετα σε δοσμένο μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} = (a, b, c)$ γράφουμε την εξίσωση
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff ax + by + cz = 0.$$
Ένα τουλάχιστον από τα a, b, c είναι μη-μηδενικό. Έστω $a \neq 0$. Επιλέγουμε $y_1 = 1, z_1 = 0$ και βρίσκουμε $x_1 = -\frac{b}{a}$. Επιλέγουμε $y_2 = 0, z_2 = 1$ και βρίσκουμε $x_2 = -\frac{c}{a}$. Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και κάθετα στο $\mathbf{v}$. Αν θέλουμε, πολλαπλασιάζουμε με το a και έχουμε τα απλούστερα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = (-b, a, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-c, 0, a)$ με τις ίδιες ιδιότητες. Ομοίως, αν $b \neq 0$ ή $c \neq 0$.
Εφαρμόζοντας την προηγούμενη τεχνική, βρείτε:
(i) παραμετρική εξίσωση του επιπέδου το οποίο περιέχει το σημείο $(4, 2, -1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.
(ii) δύο καρτεσιανές εξισώσεις της ευθείας η οποία περιέχει το σημείο $(-2, 1, 1)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

4. Στον $\mathbb{R}^2$ βρείτε την απόσταση:
(i) του σημείου $(3, 4)$ από την ευθεία με καρτεσιανή εξίσωση $4x + 2y = 7$.
(ii) του σημείου $(-3, 1)$ από την ευθεία με παραμετρική εξίσωση $(x, y) = (7, -5) + t(2, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.
(iii) του σημείου $(-3, 1)$ από την ευθεία η οποία περιέχει το σημείο $(3, -2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $7\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

5. Στον $\mathbb{R}^3$ βρείτε την απόσταση:
(i) του σημείου $(3, 4, 2)$ από το επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $x + 2y - z = 5$.
(ii) του σημείου $(-3, 1, -1)$ από το επίπεδο με παραμετρική εξίσωση $(x, y, z) = (2, 1, 1) + t(1, 1, 2) + s(-1, 2, 0)$, $t, s \in \mathbb{R}$.
(iii) του σημείου $(-3, 1, 0)$ από το επίπεδο το οποία περιέχει το σημείο $(3, -1, 1)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο το οποίο παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.
(iv) του σημείου $(3, -4, 1)$ από την ευθεία με καρτεσιανές εξισώσεις $4x + 2y + z = 7$, $-x + y = 2$.
(v) του σημείου $(-3, 1, 0)$ από την ευθεία με παραμετρική εξίσωση $(x, y, z) = (7, 5, 0) + t(1, -1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

6. Στον $\mathbb{R}^2$ βρείτε την προβολή του διανύσματος $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ στην ευθεία η οποία παράγεται από το διάνυσμα $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

7. Στον $\mathbb{R}^3$ βρείτε την προβολή:
(i) του διανύσματος $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ στην ευθεία η οποία παράγεται από το διάνυσμα $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
(ii) του διανύσματος $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ στην ευθεία με καρτεσιανές εξισώσεις $2x + y - z = 0$, $x - y + 3z = 0$.

(iii) του διανύσματος $\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ στο επίπεδο το οποίο παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και $2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

(iv) του διανύσματος $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ στο επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $x+y-3z=0$.

8. Στον $\mathbb{R}^3$ βρείτε:

   (i) καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου το οποίο περιέχει τα σημεία $(1,-1,2)$, $(0,1,3)$ και $(-1,7,2)$.

   (ii) καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου το οποίο περιέχει τα σημεία $(-1,0,2)$, $(1,2,0)$ και είναι παράλληλο στην ευθεία η οποία παράγεται από το διάνυσμα $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

   (iii) παραμετρική εξίσωση της ευθείας η οποία περιέχει το σημείο $(1,1,1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $x-y+2z=4$.

   (iv) καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου το οποίο περιέχει το σημείο $(1,-1,2)$ και είναι κάθετο στην ευθεία με παραμετρική εξίσωση $(x,y,z)=(-1,2,0)+t(1,3,-1)$, $t\in\mathbb{R}$.

   (v) παραμετρική εξίσωση της ευθείας η οποία είναι κάθετη στην ευθεία η οποία παράγεται από το διάνυσμα $\mathbf{i}+\mathbf{k}$, η οποία είναι παράλληλη στο επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $x+y-3z=7$ και η οποία περιέχει το σημείο $(-2,5,1)$.

9. Στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε:

   (i) σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα σημεία $(2,1,-2)$, $(0,3,4)$, $(\sqrt{2},1,1)$, $(-2\sqrt{3},-2,3)$, $(0,5,3)$, $(-\sqrt{2},1,0)$, $(-2,0,2)$. Μετατρέψτε σε κυλινδρικές και σε σφαιρικές συντεταγμένες.

   (ii) σε κυλινδρικές συντεταγμένες τα $(1,\frac{\pi}{4},1)$, $(2,\frac{\pi}{2},-4)$, $(0,\frac{\pi}{4},10)$, $(3,\frac{\pi}{6},4)$, $(1,\frac{\pi}{6},0)$, $(2,\frac{3\pi}{4},-2)$, $(-2,0,2)$. Μετατρέψτε σε καρτεσιανές και σε σφαιρικές συντεταγμένες.

   (iii) σε σφαιρικές συντεταγμένες τα $(1,\frac{\pi}{4},0)$, $(2,\frac{3\pi}{2},\pi)$, $(0,\pi,0)$, $(3,\frac{7\pi}{6},\frac{\pi}{4})$, $(1,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$, $(2,\pi,\frac{3\pi}{4})$. Μετατρέψτε σε καρτεσιανές και σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

10. Στον $\mathbb{R}^2$ περιγράψτε γεωμετρικά τις καμπύλες με πολικές εξισώσεις:

    (i) $r=r_0$ με δοσμένο r_0.

    (ii) $\theta=\theta_0$ με δοσμένο θ_0.

    Περιγράψτε τις ίδιες καμπύλες με καρτεσιανές εξισώσεις.

11. Στον $\mathbb{R}^2$ περιγράψτε γεωμετρικά τα χωρία που καθορίζονται από τις πολικές ανισώσεις:

    (i) $r_1\le r\le r_2$ με δοσμένα r_1,r_2.

    (ii) $\theta_1\le\theta\le\theta_2$ με δοσμένα θ_1,θ_2.

    (iii) $r_1\le r\le r_2$, $\theta_1\le\theta\le\theta_2$ με δοσμένα $r_1,r_2,\theta_1,\theta_2$.

    Προσπαθήστε να περιγράψετε τα ίδια χωρία με καρτεσιανές ανισώσεις.

12. Στον $\mathbb{R}^3$ περιγράψτε γεωμετρικά τις καμπύλες με κυλινδρικές εξισώσεις:

    (i) $r=r_0$, $\theta=\theta_0$ με δοσμένα r_0,θ_0.

    (ii) $r=r_0$, $z=z_0$ με δοσμένα r_0,z_0.

    (iii) $\theta=\theta_0$, $z=z_0$ με δοσμένα θ_0,z_0.

    Περιγράψτε τις ίδιες καμπύλες με καρτεσιανές εξισώσεις.

13. Στον $\mathbb{R}^3$ περιγράψτε γεωμετρικά τις επιφάνειες που καθορίζονται από τις κυλινδρικές εξισώσεις/ανισώσεις:

    (i) $r=r_0$, $\theta_1\le\theta\le\theta_2$, $z_1\le z\le z_2$ με δοσμένα $r_0,\theta_1,\theta_2,z_1,z_2$.

    (ii) $r_1\le r\le r_2$, $\theta=\theta_0$, $z_1\le z\le z_2$ με δοσμένα r_1,r_2,θ_0,z_1,z_2.

    (iii) $r_1\le r\le r_2$, $\theta_1\le\theta\le\theta_2$, $z=z_0$ με δοσμένα $r_1,r_2,\theta_1,\theta_2,z_0$.

    Προσπαθήστε να περιγράψετε τις ίδιες επιφάνειες με καρτεσιανές εξισώσεις/ανισώσεις.

14. Στον $\mathbb{R}^3$ περιγράψτε γεωμετρικά το χωρίο που καθορίζεται από τις κυλινδρικές ανισώσεις $r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, z_1 \leq z \leq z_2$ με δοσμένα $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, z_1, z_2$.
    Προσπαθήστε να περιγράψετε το ίδιο χωρίο με καρτεσιανές ανισώσεις.

15. Στον $\mathbb{R}^3$ περιγράψτε γεωμετρικά τις καμπύλες με σφαιρικές εξισώσεις:
    (i) $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0$ με δοσμένα ρ_0, θ_0.
    (ii) $\rho = \rho_0, \phi = \phi_0$ με δοσμένα ρ_0, ϕ_0.
    (iii) $\theta = \theta_0, \phi = \phi_0$ με δοσμένα θ_0, ϕ_0.
    Περιγράψτε τις ίδιες καμπύλες με καρτεσιανές εξισώσεις.

16. Στον $\mathbb{R}^3$ περιγράψτε γεωμετρικά τις επιφάνειες που καθορίζονται από τις σφαιρικές εξισώσεις/ανισώσεις:
    (i) $\rho = \rho_0, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ με δοσμένα $\rho_0, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$.
    (ii) $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta = \theta_0, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ με δοσμένα $\rho_1, \rho_2, \theta_0, \phi_1, \phi_2$.
    (iii) $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi = \phi_0$ με δοσμένα $\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2, \phi_0$.
    Προσπαθήστε να περιγράψετε τις ίδιες επιφάνειες με καρτεσιανές εξισώσεις/ανισώσεις.

17. Στον $\mathbb{R}^3$ περιγράψτε γεωμετρικά το χωρίο που καθορίζεται από τις σφαιρικές ανισώσεις $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ με δοσμένα $\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$.
    Προσπαθήστε να περιγράψετε το ίδιο χωρίο με καρτεσιανές ανισώσεις.

18. Περιγράψτε γεωμετρικά τις παρακάτω απεικονίσεις σε πολικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^2$:
    (i) $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \pi)$.
    (ii) $(r, \theta) \mapsto (2r, \theta)$.
    (iii) $(r, \theta) \mapsto (r, 2\pi - \theta)$.

19. Περιγράψτε γεωμετρικά τις παρακάτω απεικονίσεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$:
    (i) $(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta, -z)$.
    (ii) $(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta + \pi, -z)$.
    (iii) $(r, \theta, z) \mapsto (r, 2\pi - \theta, z)$.

20. Περιγράψτε γεωμετρικά τις παρακάτω απεικονίσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$:
    (i) $(r, \theta, \phi) \mapsto (r, \theta + \pi, \phi)$.
    (ii) $(r, \theta, \phi) \mapsto (r, \theta, \pi - \phi)$.
    (iii) $(r, \theta, \phi) \mapsto (r, \theta + \pi, \phi)$.
    (iv) $(r, \theta, \phi) \mapsto (r, 2\pi - \theta, \pi - \phi)$.