Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Περιγράψτε για τις διάφορες τιμές του c τις καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$ με καρτεσιανές εξισώσεις $(x/a)^2 - (y/b)^2 = c$ με δοσμένα $a, b > 0$ και c.

   Περιγράψτε κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων από x, y σε ξ, η ώστε οι αρχικές καρτεσιανές εξισώσεις να μετατραπούν στις $\xi\eta = c$ και με τη βοήθεια των δεύτερων περιγράψτε τις ίδιες καμπύλες.

2. Περιγράψτε τις τομές του κώνου με καρτεσιανή εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ με οποιοδήποτε επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο xy-επίπεδο. Διακρίνατε περιπτώσεις ανάλογα με το αν το κάθετο επίπεδο περιέχει τον z-άξονα ή όχι. Ξεκινήστε με τα επίπεδα τα οποία είναι παράλληλα στο yz-επίπεδο και με τα επίπεδα τα οποία είναι παράλληλα στο xz-επίπεδο.

3. Περιγράψτε τις τομές του παραβολοειδούς εκ περιστροφής με καρτεσιανή εξίσωση $z = x^2 + y^2$ με οποιοδήποτε επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο xy-επίπεδο. Ξεκινήστε με τα επίπεδα τα οποία είναι παράλληλα στο yz-επίπεδο και με τα επίπεδα τα οποία είναι παράλληλα στο xz-επίπεδο.

4. Περιγράψτε τις επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ με καρτεσιανή εξίσωση $z^2 = (x/a)^2 + (y/b)^2$.
   Περιγράψτε τις τομές με τα επίπεδα που είναι παράλληλα στο xy-επίπεδο και με τα επίπεδα που είναι κάθετα στο xy-επίπεδο (διακρίνοντας περιπτώσεις ανάλογα με το αν το κάθετο επίπεδο περιέχει τον z-άξονα ή όχι).

5. Περιγράψτε τις επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ με καρτεσιανή εξίσωση $z = (x/a)^2 + (y/b)^2$.
   Περιγράψτε τις τομές με τα επίπεδα που είναι παράλληλα στο xy-επίπεδο και με τα επίπεδα που είναι κάθετα στο xy-επίπεδο (διακρίνοντας περιπτώσεις ανάλογα με το αν το κάθετο επίπεδο περιέχει τον z-άξονα ή όχι).

6. Πώς μοιάζει μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ αν η καρτεσιανή της εξίσωση δεν περιέχει την συντεταγμένη z; Δηλαδή, αν έχει τη μορφή $f(x, y) = 0$;
   Παραδείγματα: (i) $ax+by = c$, (ii) $x^2+y^2 = r_0^2$, (iii) $y = x^2$, (iv) $x = y^2$, (v) $x^2-y^2 = c$.

   Τί γίνεται αν η καρτεσιανή εξίσωση έχει τη μορφή $f(x, z) = 0$ ή τη μορφή $f(y, z) = 0$;

7. Πώς μοιάζει μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ αν η κυλινδρική της εξίσωση δεν περιέχει την συντεταγμένη z; Δηλαδή, αν έχει τη μορφή $f(r, \theta) = 0$;
   Παραδείγματα: (i) $r = r_0$, (ii) $\theta = \theta_0$, (iii) $r\cos\theta = a$, (iv) $r\sin\theta = b$, (v) $r = 2\cos\theta$.

   Τί γίνεται αν η κυλινδρική εξίσωση έχει τη μορφή $f(r, z) = 0$;
   Παραδείγματα: (i) $z = ar$, (ii) $z = ar^2$, (iii) $z^2 + r^2 = a^2$, (iv) $z = \sin r$, (v) $r = e^{-z}$.

   Τί γίνεται αν η κυλινδρική εξίσωση έχει τη μορφή $f(\theta, z) = 0$;
   Παραδείγματα: (i) $z = \sin\theta$, (ii) $z = \cos\theta$, (iii) $z = \theta(2\pi - \theta)$.

8. Πώς μοιάζει μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ αν η σφαιρική της εξίσωση δεν περιέχει την συντεταγμένη ϕ; Δηλαδή, αν έχει τη μορφή $f(\rho, \theta) = 0$;
   Παραδείγματα: (i) $\rho = \rho_0$, (ii) $\theta = \theta_0$, (iii) $\rho = \sin\theta$, (ii) $\rho = \cos\theta$.

   Τί γίνεται αν η σφαιρική εξίσωση έχει τη μορφή $f(\rho, \phi) = 0$;
   Παραδείγματα: (i) $\rho = \cos\phi$, (ii) $\rho\cos\phi = 1$, (iii) $\rho = \sin\phi$, (iv) $\rho\sin\phi = 1$.

   Τί γίνεται αν η σφαιρική εξίσωση έχει τη μορφή $f(\theta, \phi) = 0$;
   Παραδείγματα: (i) $\theta = \theta_0$, (ii) $\phi = \phi_0$, (iii) $\sin\theta\tan\phi = 0$.