

Απειροστικός Λογισμός II, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν. Αν το σημείο στο οποίο παίρνουμε το όριο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, πείτε πώς πρέπει να οριστεί η συνάρτηση σ' αυτό το σημείο ώστε να είναι συνεχής εκεί.

- i. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^y - y + 2)$.
- ii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,3)} e^x y^2$.
- iii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} e^x$.
- iv. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$.
- v. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$.
- vi. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$.
- vii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{y}$.
- viii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 y^2}$.
- ix. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$.
- x. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$.
- xi. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$.
- xii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4 + y^4}$.
- xiii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - \sin x + y}{x^3 + 6y}$.
- xiv. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{1/2} \log(x^2 + y^2)$.
- xv. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,2,2)} \frac{x^2 yz}{x^2 + y + yz}$.
- xvi. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(x+y+z)}{x+y+z}$.
- xvii. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$.
- xviii. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{(x^2 + y^2)z}{x^4 + y^4 + z^2}$.

2. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x, y) = x^y - y \sin x$.
- ii. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$.
- iii. $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$.
- iv. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.
- v. $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$.
- vi. $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$.
- vii. $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$.
- viii. $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$.
- ix. $f(x, y) = r \sin \theta$.
- x. $f(x, y) = r \sin \theta \cos \theta$.
- xi. $f(x, y) = \theta$.
- xii. $f(x, y, z) = \rho^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi$.
- xiii. $f(x, y, z) = \phi$.
- xiv. $f(x, y, z) = \theta$.