Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις ελέγξτε βάσει του ορισμού αν είναι παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο σημείο.

   i. $f(x,y) = xy$ στο $(2,-1)$.

   ii. $f(x,y) = x^2 + y^2$ στο $(1,-2)$.

   iii. $f(x,y) = \frac{x}{y}$ στο $(1,1)$.

   iv. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ στο $(1,-1,1)$.

   v. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ στο $(0,0)$.

   vi. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ στο $(0,0)$.

   vii. $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \log(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ στο $(0,0)$.

2. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της και βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημά της στο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Βρείτε, επίσης, τα $\nabla f(x_0, y_0)$, $Df(x_0, y_0)$. Τέλος, βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

   i. $f(x,y) = x^2 + y^2$.

   ii. $f(x,y) = x - \frac{1}{y}$.

   iii. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

3. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο (x_0, y_0, z_0) του πεδίου ορισμού της και βρείτε τα $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, $Df(x_0, y_0, z_0)$.

   i. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   ii. $f(x,y,z) = ax + by + cz$.

   iii. $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

   iv. $f(x,y,z) = e^{x^2+2y^2+3z^2}$.

4. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\mathbf{x}_0$ του πεδίου ορισμού της και βρείτε τα $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, $Df(\mathbf{x}_0)$.

   i. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

   ii. $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$.

   iii. $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

   iv. $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}$.

   v. $f(x_1, \ldots, x_n) = e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}$.

5. Θεωρήστε τις επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ με τις παρακάτω καρτεσιανές εξισώσεις. Για καθεμία βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδό της στο αντίστοιχο σημείο καθώς και ένα κάθετο διάνυσμα προς αυτήν στο ίδιο σημείο.

i. $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ στο σημείο $(3, 5, -4)$.

ii. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ στο σημείο $(1, 1, 1)$.

iii. $(\cos x)(\cos y)e^z = 1$ στο σημείο $(0, 0, 0)$.

6. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα τής

$$f(x, y) = e^{2x+3y}$$

σε οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Υπολογίστε το $\nabla f(x_0, y_0)$. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της ισοσταθμικής καμπύλης στο xy-επίπεδο η οποία περιέχει το (x_0, y_0) και βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα στην ισοσταθμική καμπύλη στο σημείο (x_0, y_0). Τί παρατηρείτε;

7. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα τής

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

σε οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Υπολογίστε το $\nabla f(x_0, y_0)$. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της ισοσταθμικής καμπύλης στο xy-επίπεδο η οποία περιέχει το (x_0, y_0) και βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα στην ισοσταθμική καμπύλη στο σημείο (x_0, y_0). Τί παρατηρείτε;

8. Βρείτε ένα σημείο (x_0, y_0) έτσι ώστε το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ στο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ να έχει κλίση 2 στην θετική x-κατεύθυνση και κλίση 4 στην θετική y-κατεύθυνση.

9. Θα λέγατε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad g(x, y) = x^2y + 2xy^2 - x^2 - 6xy - 2y^2 + 6x + 7y - 5$$

εφάπτονται στο σημείο $(1, 1, 2)$;

10. Έστω l το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της $f(x, y) = 8 - 2x^2 - 3y^2$ στο σημείο $(1, 2, -6)$. Βρείτε σε ποιό σημείο του το γράφημα της $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο στο l.

11. Έστω ότι ισχύει $f(x, y) = f(y, x)$ για κάθε (x, y). Αποδείξτε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$ για κάθε (x, y).