Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις $\mathbf{f}$ βρείτε τον πίνακα $D\mathbf{f}$ σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

   i. $\mathbf{f}(x,y) = (x,y)$.
   ii. $\mathbf{f}(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$.
   iii. $\mathbf{f}(x,y) = (e^x, \sin(xy))$.
   iv. $\mathbf{f}(x,y) = (x+y, x-y, xy)$.
   v. $\mathbf{f}(x,y) = (x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2))$.
   vi. $\mathbf{f}(x,y) = (1, x/y, y/x)$.
   vii. $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+y+e^z, x^2y)$.
   viii. $\mathbf{f}(x,y,z) = (x-y, y+z)$.
   ix. $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+z, y-5z, x-y)$.
   x. $\mathbf{f}(x,y,z) = ((yz)/x, x/(yz))$.

2. Βρείτε μέσω του κανόνα της αλυσίδας τις μερικές παραγώγους της σύνθεσης $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

   i. $\mathbf{f}(x,y) = (x^2e^y, x+y^2, xy)$, $\mathbf{g}(u,v,w) = (u^2e^v, uw^2)$.
   ii. $\mathbf{f}(x,y) = (xy, x+y^2)$, $\mathbf{g}(u,v) = (uv, u^2\sin v, e^{uv})$.
   iii. $f(x,y) = e^x\cos y$, $\mathbf{g}(u) = (u^2, 2u)$.
   iv. $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+y, y-z, \sin(xz))$, $g(u,v,w) = uv\sin(u+w)$.

   Σε κάθε περίπτωση γράψτε και τον τύπο του κανόνα της αλυσίδας: $D\mathbf{h} = D\mathbf{g}D\mathbf{f}$,

3. Στις παρακάτω περιπτώσεις βρείτε μέσω του κανόνα της αλυσίδας τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης h συναρτήσει των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων που εμπλέκονται στον ορισμό της.

   i. $h(x,y) = f(x, v(x,y))$.
   ii. $h(x,y) = f(u(x), v(x,y))$.
   iii. $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.
   iv. $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y), w(x))$.

4. Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A. Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

   Η h είναι ουσιαστικά η f εκφρασμένη σε πολικές συντεταγμένες. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial h}{\partial r}$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ της h συναρτήσει των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ της f.

5. Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \,|\, z \in \mathbb{R}\}$, παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.

   [α] Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Η h είναι ουσιαστικά η f εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial h}{\partial r}$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}$, $\frac{\partial h}{\partial z}$ της h συναρτήσει των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ της f.

[β] Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \cos\theta \sin\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho \cos\phi).$$

Η h είναι ουσιαστικά η f εκφρασμένη σε σφαιρικές συντεταγμένες. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial h}{\partial \rho}$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}$, $\frac{\partial h}{\partial \phi}$ της h συναρτήσει των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ της f.

6. Αν $h(x, y) = f(x - y)$ για κάθε (x, y) και η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x, y).$$

7. Αν $h(x, y) = f(xy)$ για κάθε (x, y) και η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι
$$x\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x, y).$$

8. Αν $h(x, y) = f(\frac{x+y}{x-y})$ για κάθε (x, y) με $x \neq y$ και η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι
$$x\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x, y) \text{ με } x \neq y.$$

9. Αν $h(x, y) = xyf(\frac{x+y}{xy})$ για κάθε (x, y) με $xy \neq 0$ και η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι
$$x^2\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - y^2\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = g(x, y)h(x, y) \qquad \text{για κάθε } (x, y),$$
όπου g είναι κάποια συνάρτηση την οποία πρέπει να προσδιορίσετε.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Αν
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + u(t, x)\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0 \qquad \text{για κάθε } (t, x)$$
και
$$f'(t) = u(t, f(t)) \qquad \text{για κάθε } t,$$
αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(t) = u(t, f(t))$ είναι σταθερή.

11. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$$f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x}) \qquad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$
Τότε λέμε ότι η f είναι **ομογενής** βαθμού p.

[α] Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $\mathbf{x}$ αποδείξτε ότι
$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) \qquad (\textbf{ταυτότητα του Euler}).$$

[β] Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $\mathbf{x}$ αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη και στο $t\mathbf{x}$ για κάθε $t > 0$.