Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Ένατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Υπολογίστε όλες τις μερικές παραγώγους μέχρι και τρίτης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων. Ελαχιστοποιήστε την εργασία σας λαμβάνοντας υπ' όψη τις αναμενόμενες ισότητες ανάμεσα στις διάφορες μεικτές παραγώγους.

   i. $f(x, y) = \sin(xy^2)$.
   ii. $f(x, y) = x^2 y$.
   iii. $f(x, y, z) = x \cos(yz)$.
   iv. $f(x, y, z) = ye^{x+z}$.
   v. $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^p$.

2. Υπολογίστε συναρτήσει των μερικών παραγώγων της πραγματικής συνάρτησης f (δύο ή τριών μεταβλητών) την παράγωγο δεύτερης τάξης της πραγματικής συνάρτησης g (μίας μεταβλητής).

   i. $g(t) = f(t \sin t, e^t)$.
   ii. $g(t) = f(t^2, te^t, \sin(t^2))$.

3. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της πραγματικής συνάρτησης f συναρτήσει των μερικών παραγώγων των εμπλεκομένων στον τύπο της συναρτήσεων.

   i. $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$.
   ii. $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$.
   iii. $f(x, y, z) = g(u(x, y, z), v(x, y, z))$.

4. Γράψτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων.

   i. $f(x, y) = \sin(3x + 2y)$ στο σημείο $(0, 0)$.
   ii. $f(x, y) = e^x \sin y$ στο σημείο $(0, 0)$.
   iii. $f(x, y) = \cos(xy)$ στο σημείο $(1, \pi)$.
   iv. $f(x, y) = \frac{x+y}{x+y+1}$ στο σημείο $(0, 0)$.
   v. $f(x, y, z) = (1 + x)(1 + y)(1 + z)$ στο σημείο $(0, 0, 0)$.
   vi. $f(x, y, z) = xe^{y+z}$ στο σημείο $(0, 0, 0)$.

5. Γράψτε τις παρακάτω παραστάσεις στη μορφή $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ καθώς και στη μορφή $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ με κατάλληλο *συμμετρικό* πίνακα A και διάνυσμα $\mathbf{x}$.

   i. $3x^2 + 6xy - y^2$.
   ii. $x^2 - 2xy + 2y^2$.
   iii. $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 2xz + yz$.
   iv. $x^2 + y^2 - z^2 + xy - xz + 2yz$.
   v. $x^2 + 4y^2$.
   vi. $x^2 - y^2 + 2z^2$.
   vii. $x^2 + 2y^2 - z^2 + w^2 + 2xy + 4xz - xw + 2yz + 6yw + zw$.

6. [α] Αποδείξτε το κριτήριο παραγωγισιμότητας για πραγματικές συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Δηλαδή το ότι, αν όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της πραγματικής συνάρτησης $f(x, y, z)$ υπάρχουν σε κάθε σημείο (x, y, z) το οποίο βρίσκεται αρκούντως κοντά στο σημείο (x_0, y_0, z_0) και είναι συνεχείς στο (x_0, y_0, z_0), τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0, z_0).

   Υπόδειξη: Γράψτε

$$\begin{aligned} f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) &= (f(x,y,z) - f(x_0,y,z)) + (f(x_0,y,z) - f(x_0,y_0,z)) \\ &\quad + (f(x_0,y_0,z) - f(x_0,y_0,z_0)) \end{aligned}$$

   και μιμηθείτε την απόδειξη που κάναμε στην περίπτωση συνάρτησης δύο μεταβλητών.

   [β] Γενικεύοντας την απόδειξη του [α], αποδείξτε το γενικό κριτήριο παραγωγισιμότητας. Δηλαδή το ότι, αν όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της πραγματικής συνάρτησης $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ υπάρχουν σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ το οποίο βρίσκεται αρκούντως κοντά στο σημείο $\mathbf{x}_0$ και είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$, τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.

7. Στο μάθημα αποδείξαμε ότι αν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x, y)$ είναι συνεχείς σε κάθε σημείο (x, y) το οποίο βρίσκεται αρκούντως κοντά στο (x_0, y_0) τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

   [α] Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, αποδείξτε (πολύ εύκολα) ότι το ίδιο ισχύει για πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών. Δηλαδή, ότι αν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της πραγματικής συνάρτησης $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ είναι συνεχείς σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ το οποίο βρίσκεται αρκούντως κοντά στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0).$$

   [β] Γενικεύστε (πολύ εύκολα, με επαγωγή) για παραγώγους τάξης k. Δηλαδή, ότι αν όλες οι μερικές παράγωγοι τάξης k της πραγματικής συνάρτησης $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ είναι συνεχείς σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ το οποίο βρίσκεται αρκούντως κοντά στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}}(\mathbf{x}_0),$$

   όπου $(\sigma(1), \ldots, \sigma(k))$ είναι οποιαδήποτε αναδιάταξη των $(1, \ldots, k)$.

8. Αποδείξτε το ανάπτυγμα Taylor τρίτης τάξης πραγματικής συνάρτησης n μεταβλητών. Δηλαδή, υποθέστε ότι η πραγματική συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τρίτης τάξης σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ αρκούντως κοντά στο $\mathbf{x}_0$ και αποδείξτε ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})(x_k - x_{0k}) + R(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

   όπου $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ και όπου η συνάρτηση $R(\mathbf{x})$ έχει την ιδιότητα:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{R(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} = 0.$$