**Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2019-20.**

**Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.**

1. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις $f$ αποδείξτε (*όχι με τον ορισμό*) ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $(x, y)$ του πεδίου ορισμού της. Βρείτε, επίσης, τα $\nabla f(x, y)$, $Df(x, y)$. Κατόπιν βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα της $f$ σε οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Τέλος, βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα στο γράφημα της $f$ στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

   i. $f(x, y) = x^2 + y^2$.
   ii. $f(x, y) = x - \frac{1}{y}$.
   iii. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

2. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις $f$ αποδείξτε (*όχι με τον ορισμό*) ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $(x, y, z)$ του πεδίου ορισμού της και βρείτε τα $\nabla f(x, y, z)$, $Df(x, y, z)$.

   i. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
   ii. $f(x, y, z) = ax + by + cz$.
   iii. $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.
   iv. $f(x, y, z) = e^{x^2+2y^2+3z^2}$.

3. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις $f$ αποδείξτε (*όχι με τον ορισμό*) ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ του πεδίου ορισμού της και βρείτε τα $\nabla f(\mathbf{x})$, $Df(\mathbf{x})$.

   i. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.
   ii. $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$.
   iii. $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.
   iv. $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}$.
   v. $f(x_1, \ldots, x_n) = e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}$.

4. Για καθεμία από τις παρακάτω *διανυσματικές* συναρτήσεις $\mathbf{f}$ βρείτε τον πίνακα $D\mathbf{f}$ σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και αποδείξτε (*με τον ορισμό*) ότι είναι παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο σημείο.

   i. $\mathbf{f}(x, y) = (x, y)$, στο $(1, 3)$
   ii. $\mathbf{f}(x, y) = (e^x, \sin(xy))$, στο $(0, 0)$.
   iii. $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, x - y, xy)$, στο $(1, 1)$.
   iv. $\mathbf{f}(x, y) = (x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$, στο $(1, 0)$.
   v. $\mathbf{f}(x, y) = (1, x/y, y/x)$, στο $(1, 1)$.
   vi. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x - y, y + z)$, στο $(1, 2, -3)$.
   vii. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y + e^z, x^2y)$, στο $(0, 0, 0)$.
   viii. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + z, y - 5z, x - y)$, στο $(-1, 2, 3)$.
   ix. $\mathbf{f}(x, y, z) = ((yz)/x, x/(yz))$, στο $(1, 1, 1)$.

5. Θεωρήστε τις επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ με τις παρακάτω καρτεσιανές εξισώσεις. Προσπαθήστε να τις εκφράσετε ως γραφήματα κατάλληλων συναρτήσεων, λύνοντας ως προς μία από τις μεταβλητές, π.χ. την $z$. Προσέξτε όταν η λύση δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Κατόπιν, για καθεμία βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδό της στο αντίστοιχο σημείο καθώς και ένα κάθετο διάνυσμα προς αυτήν στο ίδιο σημείο.

i. $2x + y - 3z = 7$ στο σημείο $(1, 8, 1)$.

ii. $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ στο σημείο $(3, 5, -4)$.

iii. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ στο σημείο $(1, 1, 1)$.

iv. $(\cos x)(\cos y)e^z = 1$ στο σημείο $(0, 0, 0)$.

6. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα τής

$$f(x, y) = e^{2x+3y}$$

σε οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Υπολογίστε το $\nabla f(x_0, y_0)$. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της ισοσταθμικής καμπύλης στο $xy$-επίπεδο η οποία περιέχει το $(x_0, y_0)$ και βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα στην ισοσταθμική καμπύλη στο σημείο $(x_0, y_0)$. Τί παρατηρείτε;

7. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα τής

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

σε οποιοδήποτε σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Υπολογίστε το $\nabla f(x_0, y_0)$. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της ισοσταθμικής καμπύλης στο $xy$-επίπεδο η οποία περιέχει το $(x_0, y_0)$ και βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα στην ισοσταθμική καμπύλη στο σημείο $(x_0, y_0)$. Τί παρατηρείτε;

8. Βρείτε ένα σημείο $(x_0, y_0)$ έτσι ώστε το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ στο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ να έχει κλίση 2 στην θετική $x$-κατεύθυνση και κλίση 4 στην θετική $y$-κατεύθυνση.

9. Έστω ότι ισχύει $f(x, y) = f(y, x)$ για κάθε $(x, y)$. Αποδείξτε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$ για κάθε $(x, y)$.