

Απειροστικός Λογισμός II, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε μέσω του κανόνα της αλυσίδας τις μερικές παραγώγους της σύνθεσης $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i. $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 e^y, x + y^2, xy)$, $\mathbf{g}(u, v, w) = (u^2 e^v, uw^2)$.

ii. $\mathbf{f}(x, y) = (xy, x + y^2)$, $\mathbf{g}(u, v) = (uv, u^2 \sin v, e^{uv})$.

iii. $f(x, y) = e^x \cos y$, $\mathbf{g}(u) = (u^2, 2u)$.

iv. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y, y - z, \sin(xz))$, $g(u, v, w) = uv \sin(u + w)$.

Σε κάθε περίπτωση γράψτε και τον τύπο του κανόνα της αλυσίδας: $D\mathbf{h} = D\mathbf{g}D\mathbf{f}$,

2. Στις παρακάτω περιπτώσεις βρείτε μέσω του κανόνα της αλυσίδας τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης h συναρτήσει των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων που εμπλέκονται στον ορισμό της.

i. $h(x, y) = f(x, v(x, y))$.

ii. $h(x, y) = f(u(x), v(x, y))$.

iii. $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.

iv. $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$.

3. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A . Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Η h είναι ουσιαστικά η f εκφρασμένη σε πολικές συντεταγμένες. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial h}{\partial r}$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ της h συναρτήσει των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ της f .

4. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A .

(i) Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Η h είναι ουσιαστικά η f εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial h}{\partial r}$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}$, $\frac{\partial h}{\partial z}$ της h συναρτήσει των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ της f .

(ii) Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi).$$

Η h είναι ουσιαστικά η f εκφρασμένη σε σφαιρικές συντεταγμένες. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial h}{\partial \rho}$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}$, $\frac{\partial h}{\partial \phi}$ της h συναρτήσει των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ της f .

5. Αν $h(x, y) = f(x - y)$ για κάθε (x, y) και η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \text{για κάθε } (x, y).$$

6. Αν $h(x, y) = f(xy)$ για κάθε (x, y) και η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αποδείξτε ότι

$$x \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \text{για κάθε } (x, y).$$

7. Αν $h(x, y) = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ για κάθε (x, y) με $x \neq y$ και η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αποδείξτε ότι

$$x \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \text{για κάθε } (x, y) \text{ με } x \neq y.$$

8. Αν $h(x, y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)$ για κάθε (x, y) με $xy \neq 0$ και η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αποδείξτε ότι

$$x^2 \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - y^2 \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = g(x, y)h(x, y) \quad \text{για κάθε } (x, y),$$

όπου g είναι κάποια συνάρτηση την οποία πρέπει να προσδιορίσετε.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Αν

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0 \quad \text{για κάθε } (t, x)$$

και

$$f'(t) = u(t, f(t)) \quad \text{για κάθε } t,$$

αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(t) = u(t, f(t))$ είναι σταθερή.

10. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x}) \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Τότε λέμε ότι η f είναι **ομογενής** βαθμού p .

- (i) Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο \mathbf{x} αποδείξτε ότι

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) \quad (\text{ταυτότητα του Euler}).$$

- (ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο \mathbf{x} αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη και στο $t\mathbf{x}$ για κάθε $t > 0$.