Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Περιγράψτε την τροχιά καθεμίας από τις παρακάτω καμπύλες. Σε ποιόν ευκλείδειο χώρο βρίσκεται καθεμία από αυτές τις τροχιές;

   i. $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, 3\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   ii. $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\sin t, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   iii. $\boldsymbol{\sigma}(t) = (2t, t-3)$, $t \in [0,1]$.
   iv. $\boldsymbol{\sigma}(t) = (2t-1, t+2, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   v. $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, 1/t)$, $t \in (0, +\infty)$.
   vi. $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.
   vii. $\boldsymbol{\sigma}(t) = (1, \cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   viii. $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Για καθένα από τα παρακάτω σχήματα βρείτε καμπύλη έτσι ώστε το σχήμα να είναι η τροχιά της καμπύλης. Με άλλα λόγια, παραμετρικοποιήστε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.

   i. Η ευθεία στον xyz-χώρο η οποία διέρχεται από τα σημεία $(1,-1,3)$, $(0,2,1)$.
   ii. Ο κύκλος στο xy-επίπεδο με κέντρο το $(3,-1)$ και ακτίνα 4.
   iii. Το γράφημα στο xy-επίπεδο της συνάρτησης $f(x) = x^2$.
   iv. Η έλλειψη στο xy-επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $(x/4)^2 + (y/3)^2 = 1$.
   v. Ο κύκλος στον xyz-χώρο με κέντρο το $(1,1,3)$ και ακτίνα 3 ο οποίος βρίσκεται πάνω σε επίπεδο παράλληλο στο xz-επίπεδο.

3. Για καθεμία από τις καμπύλες της άσκησης 1 βρείτε εφαπτόμενο διάνυσμα καθώς και την καρτεσιανή εξίσωση και την παραμετρική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στα παρακάτω αντίστοιχα σημεία.

   i. $(-1,0)$.
   ii. $(\sqrt{3}/2, 1/2)$.
   iii. $(1,-5/2)$.
   iv. $(-1,2,0)$.
   v. $(2,1/2)$.
   vi. $(1,1)$.
   vii. $(1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
   viii. $(-1,0,\pi)$.

4. Για καθεμία από τις καμπύλες της άσκησης 1 βρείτε εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\sigma}$ στο γενικό σημείο της, όπου η αντίστοιχη $\mathbf{f}$ περιγράφεται παρακάτω.

   i. $\mathbf{f}(x,y) = (xy, x+y)$.
   ii. $\mathbf{f}(x,y) = (x^2, xy, y^2)$.
   iii. $\mathbf{f}(x,y) = (x-y, x+2y)$.
   iv. $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+y, yz)$.
   v. $\mathbf{f}(x,y) = (x, xy, y^2)$.
   vi. $\mathbf{f}(x,y) = (x^2, y)$.

vii. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x - y, xyz)$.

viii. $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, x, y)$.

5. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις **f** βρείτε στο δοσμένο σημείο την παράγωγο στην δοσμένη κατεύθυνση **v**. (Παρατηρήστε ότι για κάθε τέτοια **v** ισχύει $\|\mathbf{v}\| = 1$.)

   i. $f(x, y) = xy$, $(-1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$.

   ii. $f(x, y) = ye^{xy}$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

   iii. $f(x, y, z) = xy + z^2$, $(-1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

   iv. $f(x, y, z) = \sin(xyz^2)$, $(-1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$.

   v. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, γενικό $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$.

   vi. $f(x_1, \ldots, x_n) = 1/\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, γενικό $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$.

   vii. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1|x_1| + \cdots + x_n|x_n|$, γενικό $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$.

   Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις βρείτε την κατεύθυνση **v** (με $\|\mathbf{v}\| = 1$), πιθανόν διαφορετική από την δοσμένη, ώστε στο δοσμένο σημείο η παράγωγος της f στην κατεύθυνση **v** να είναι (α) μέγιστη θετική, (β) μέγιστη αρνητική, (γ) μηδενική. Λάβετε υπ’ όψιν ότι για την μηδενική παράγωγο προκύπτουν πάντοτε δύο κατευθύνσεις.