Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Υπολογίστε όλες τις μερικές παραγώγους μέχρι και τρίτης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων. Ελαχιστοποιήστε την εργασία σας λαμβάνοντας υπ' όψιν τις αναμενόμενες ισότητες ανάμεσα στις διάφορες μεικτές παραγώγους.

   i. $f(x, y) = x^2 y$.
   ii. $f(x, y) = \sin(xy^2)$.
   iii. $f(x, y, z) = x\cos(yz)$.
   iv. $f(x, y, z) = ye^{x+z}$.
   v. $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^p$.

2. Υπολογίστε συναρτήσει των μερικών παραγώγων της πραγματικής συνάρτησης f (δύο ή τριών μεταβλητών) την παράγωγο δεύτερης τάξης της πραγματικής συνάρτησης g (μίας μεταβλητής).

   i. $g(t) = f(t\sin t, e^t)$. Θεωρήστε ότι η f γράφεται $f(x, y)$.
   ii. $g(t) = f(t^2, te^t, \sin(t^2))$. Θεωρήστε ότι η f γράφεται $f(x, y, z)$.

3. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της πραγματικής συνάρτησης f συναρτήσει των μερικών παραγώγων των εμπλεκομένων στον τύπο της συναρτήσεων.

   i. $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$. Θεωρήστε ότι η g γράφεται $g(u, v)$.
   ii. $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$. Θεωρήστε ότι η g γράφεται $g(u, v, w)$.
   iii. $f(x, y, z) = g(u(x, y, z), v(x, y, z))$. Θεωρήστε ότι η g γράφεται $g(u, v)$.

4. Γράψτε τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές στη μορφή $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ με κατάλληλο *συμμετρικό* πίνακα A και διάνυσμα $\mathbf{x}$.

   i. $Q(x, y) = 3x^2 + 6xy - y^2$.
   ii. $Q(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$.
   iii. $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 2xz + yz$.
   iv. $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + xy - xz + 2yz$.
   v. $Q(x, y) = x^2 + 4y^2$.
   vi. $Q(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$.
   vii. $Q(x, y, z, w) = x^2 + 2y^2 - z^2 + w^2 + 2xy + 4xz - xw + 2yz + 6yw + zw$.

5. Γράψτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων.

   i. $f(x, y) = \sin(3x + 2y)$ στο σημείο $(0, 0)$.
   ii. $f(x, y) = e^x \sin y$ στο σημείο $(0, 0)$.
   iii. $f(x, y) = \cos(xy)$ στο σημείο $(1, \pi)$.
   iv. $f(x, y) = \frac{x+y}{x+y+1}$ στο σημείο $(0, 0)$.
   v. $f(x, y, z) = (1 + x)(1 + y)(1 + z)$ στο σημείο $(0, 0, 0)$.
   vi. $f(x, y, z) = xe^{y+z}$ στο σημείο $(0, 0, 0)$.