Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Προσδιορίστε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων.

   i. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$.
   ii. $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$.
   iii. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$.
   iv. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$.
   v. $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y + 4$.
   vi. $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$.
   vii. $f(x,y) = y + x\sin y$.
   viii. $f(x,y) = (x-y)(xy-1)$.
   ix. $f(x,y) = x\sin y$.
   x. $f(x,y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$.
   xi. $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$.
   xii. $f(x,y) = 5ye^x - e^{5x} - y^5$.
   xiii. $f(x,y) = y^2 - x^3 - 3x^2$.
   xiv. $f(x,y) = (x-1)^2 + (x-y)^2$.
   xv. $f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^4$.
   xvi. $f(x,y) = (2 + \cos x)\sin y$.
   xvii. $f(x,y) = \frac{\sin x}{1+y^2}$.
   xviii. $f(x,y) = y^2(\sin x - \frac{x}{2})$.
   xix. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.
   xx. $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

2. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω συναρτήσεων.

   i. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ στον δίσκο $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq 1\}$.
   ii. $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$ στον δίσκο $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq 1\}$.
   iii. $f(x,y) = \sin x + \cos y$ στο τετράγωνο $\{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$.
   iv. $f(x,y) = xy$ στο τετράγωνο $\{(x,y)\,|\,-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
   v. $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ στο τετράγωνο $\{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
   vi. $f(x,y) = 1 + xy - 2x + y$ στο τρίγωνο με κορυφές $(-2,1)$, $(-2,5)$, $(2,1)$.

   Υπόδειξη. Σε όλα αυτά δουλέψτε ξεχωριστά στο εσωτερικό και ξεχωριστά στο σύνορο κάθε συνόλου, όπως σε ένα από τα παραδείγματα. Το σύνορο του δίσκου μπορείτε να το παραμετρικοποιήσετε με τον γνωστό τρόπο: $x = \cos t$, $y = \sin t$ για $t \in \mathbb{R}$. Σε κάθε τετράγωνο παραμετρικοποιήστε ξεχωριστά κάθε πλευρά του. Π.χ. η κάτω πλευρά του τετραγώνου στην (iv) παραμετρικοποιείται ως εξής: $x = t$, $y = -1$ για $-1 \leq t \leq 1$. Για την αριστερή πλευρά του ίδιου τετραγώνου: $x = -1$, $y = t$ για $-1 \leq t \leq 1$.

3. Βρείτε τις τιμές της σταθεράς k για τις οποίες η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + kyz$ έχει το $(0,0,0)$ ως σημείο τοπικού ελαχίστου.

4. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$. Αποδείξτε ότι το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f όταν την περιορίσουμε σε οποιαδήποτε ευθεία η οποία διέρχεται από το $(0,0)$ αλλά ότι το $(0,0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f. Σχεδιάστε το σύνολο των σημείων στα οποία η f έχει θετικές τιμές και το σύνολο των σημείων στα οποία η f έχει αρνητικές τιμές και εξηγήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα.

5. Βρείτε το σημείο του επιπέδου με καρτεσιανή εξίσωση $2x-y+2z=20$ το οποίο βρίσκεται κοντύτερα στο σημείο $(0,0,0)$.

6. Αποδείξτε ότι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με δεδομένο όγκο V έχει ελάχιστο εμβαδό επιφανείας όταν είναι κύβος.
Υπόδειξη. Αν $x, y > 0$ είναι τα μήκη των δύο ακμών του ορθ. παραλληλεπιπέδου με όγκο V, τότε ποιό είναι το μήκος z τις τρίτης ακμής;

7. Ποιά τρίγωνα έχουν μέγιστο το γινόμενο των ημιτόνων των γωνιών τους;

8. Τρία σημεία στο επίπεδο σχηματίζουν οξυγώνιο τρίγωνο. Βρείτε το σημείο του επιπέδου του οποίου το άθροισμα των αποστάσεων από τα τρία σημεία είναι ελάχιστο.

9. *Η Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων.*
(i) Έστω διαφορετικοί ανά δύο αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ και αριθμοί $y_1, \ldots, y_n$. Προσδιορίστε αριθμούς a, b έτσι ώστε το *τετραγωνικό σφάλμα*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n}((ax_i+b)-y_i)^2$$

να είναι ελάχιστο. Το άθροισμα αυτό εκφράζει το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων (x_i, y_i) από την ευθεία με καρτεσιανή εξίσωση $y = ax+b$.
(ii) Έστω διαφορετικά ανά δύο σημεία $(x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$ και αριθμοί $z_1, \ldots, z_n$. Προσδιορίστε αριθμούς a, b, c έτσι ώστε το *τετραγωνικό σφάλμα*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n}((ax_i+by_i+c)-z_i)^2$$

να είναι ελάχιστο. Το άθροισμα αυτό εκφράζει το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων (x_i, y_i, z_i) από το επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $z = ax+by+c$.

10. Έστω διαφορετικά ανά δύο σημεία $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}) = \textstyle\sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k\|^2$$

έχει ελάχιστη τιμή στο σημείο $\mathbf{x} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\mathbf{x}_k$, το *κέντρο βάρους* των $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$.