Ολοκληρωτικός Λογισμός πολλών μεταβλητών

Πρόχειρες σημειώσεις

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

1η εβδομάδα.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

στον $\mathbb{R}^2$ και μια πραγματική συνάρτηση

$$f : R \to \mathbb{R}$$

ορισμένη στο R και θέλουμε να ορίσουμε το **διπλό ολοκλήρωμα** της f στο R. Αυτό θα γίνει με τρόπο ανάλογο του τρόπου ορισμού του απλού ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα του $\mathbb{R}$, παίρνοντας, δηλαδή, αθροίσματα Riemann και το όριό τους. Θα θεωρήσουμε διαμερίσεις του ορθογωνίου R σε μικρότερα ορθογώνια, μέσω αυτών των διαμερίσεων θα θεωρήσουμε τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann της f και μέσω αυτών των αθροισμάτων Riemann, περνώντας στο όριο, θα προκύψει το διπλό ολοκλήρωμα της f στο R.

Ξεκινάμε με μια διαμέριση

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

του διαστήματος $[a, b]$ στον x-άξονα και με μια διαμέριση

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$$

του διαστήματος $[c, d]$ στον y-άξονα. Όταν σχεδιάσουμε τις κατακόρυφες ευθείες που τέμνουν τον x-άξονα στα σημεία της πρώτης διαμέρισης και τις οριζόντιες ευθείες που τέμνουν τον y-άξονα στα σημεία της δεύτερης διαμέρισης, σχηματίζεται μια διαμέριση του ορθογωνίου R σε mn μικρότερα ορθογώνια

$$R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le m.$$

Όσο λεπτότερη είναι η διαμέριση του $[a, b]$, δηλαδή όσο μικρότερο είναι το

$$\max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i,$$

και όσο λεπτότερη είναι η διαμέριση του $[c, d]$, δηλαδή όσο μικρότερο είναι το

$$\max_{1 \le j \le m} (y_j - y_{j-1}) = \max_{1 \le j \le m} \Delta y_j,$$

τόσο λεπτότερη λέμε ότι είναι η διαμέριση του ορθογωνίου R στα ορθογώνια $R_{i,j}$.

Κατόπιν, δεδομένης της διαμέρισης που θεωρήσαμε παραπάνω, θεωρούμε μέσα σε κάθε ορθογώνιο $R_{i,j}$ ένα τυχαίο σημείο $\xi_{i,j}$ και σχηματίζουμε το διπλό άθροισμα

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\, \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\, \text{εμβ}(R_{i,j}). \qquad (1)$$

Στο άθροισμα αυτό ο δείκτης i τρέχει από 1 έως n και ο δείκτης j τρέχει από 1 έως m. Το άθροισμα αυτό ονομάζεται **άθροισμα Riemann** της f που ορίζεται από την συγκεκριμένη διαμέριση του ορθογωνίου R σε υποορθογώνια $R_{i,j}$ και από την συγκεκριμένη επιλογή "ενδιάμεσων" σημείων $\xi_{i,j}$ στα $R_{i,j}$.

Και τώρα έχουμε τον εξής βασικό ορισμό.

*Αν όσο λεπτότερη είναι η διαμέριση του R στα υποορθογώνια $R_{i,j}$ τόσο πιο κοντά έρχεται το άθροισμα Riemann σε κάποιον συγκεκριμένο αριθμό, τότε λέμε ότι η f είναι **(Riemann) ολοκληρώσιμη** στο R και ο αριθμός τον οποίο πλησιάζει το άθροισμα Riemann ονομάζεται **(Riemann) ολοκλήρωμα** της f στο R και συμβολίζεται*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \qquad \text{ή} \qquad \iint_R f.$$

Αν, λοιπόν, η f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο R, τότε έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

όταν $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i \approx 0$ και $\max_{1\le j\le m} \Delta y_j \approx 0$ (όπου, $\approx$ σημαίνει περίπου ίσο). Ή, με άλλα λόγια,

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \to \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

όταν $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$ και $\max_{1\le j\le m} \Delta y_j \to 0$.

Αν η f είναι μη-αρνητική, δηλαδή αν ισχύει $f(x,y) \ge 0$ για κάθε $(x,y) \in R$, τότε ο όρος $f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j = f(\xi_{i,j})\,\text{εμβ}(R_{i,j})$ ισούται με τον όγκο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου το οποίο έχει βάση το ορθογώνιο $R_{i,j}$ στο xy-επίπεδο και ύψος $f(\xi_{i,j})$, δηλαδή του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου το οποίο εκτείνεται κατακόρυφα πάνω από το xy-επίπεδο από το ορθογώνιο $R_{i,j}$ μέχρι το σημείο $(\xi_{i,j}, f(\xi_{i,j}))$ του γραφήματος της f. Άρα, σ' αυτήν περίπτωση, το άθροισμα Riemann (1) ισούται με τον όγκο της ένωσης όλων αυτών των ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων. Όταν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο R και η διαμέριση είναι πολύ λεπτή τότε, αφ' ενός το άθροισμα Riemann προσεγγίζει το διπλό ολοκλήρωμα της f στο R αφ' ετέρου η ένωση των ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων προσεγγίζει το στερεό που βρίσκεται πάνω από το ορθογώνιο και κάτω από την επιφάνεια/γράφημα της f και, επομένως, ο όγκος της ένωσης των ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων προσεγγίζει τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο R και στο γράφημα της f. Συμπεραίνουμε ότι:

Αν η f είναι μη-αρνητική και ολοκληρώσιμη στο R, τότε το διπλό ολοκλήρωμα της f στο R ισούται με τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο R και στο γράφημα της f.

Είδαμε μερικές ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος συνάρτησης σε ορθογώνιο.

Όταν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο ορθογώνιο R τότε και η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και ισχύει

$$\iint_R (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy. \tag{2}$$

Η απόδειξη πάει περίπου ως εξής. Θεωρούμε, όπως στην αρχή, μια διαμέριση του R σε ορθογώνια $R_{i,j}$, σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann της $f+g$ και κάνουμε πράξεις σ' αυτό ώστε να προκύψουν τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann των f και g ξεχωριστά:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n,m} (f(\xi_{i,j})+g(\xi_{i,j}))\,\Delta x_i \Delta y_j &= \sum_{i,j=1}^{n,m} (f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j + g(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j + \sum_{i,j=1}^{n,m} g(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \\ &\approx \iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy\end{aligned}$$

όταν $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \approx 0$ και $\max_{1\le j\le m}\Delta y_j \approx 0$. Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα ισχύει διότι οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο R. Άρα το άθροισμα Riemann της $f+g$ προσεγγίζει τον αριθμό $\iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy$ και, επομένως, η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και το ολοκλήρωμά της στο R είναι ίσο με αυτόν τον αριθμό, δηλαδή ισχύει η σχέση (2).

Μια άλλη ιδιότητα είναι η εξής.

Όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο R και λ είναι αριθμός, τότε και η λf είναι ολοκληρώσιμη στο R και ισχύει

$$\iint_R \lambda f(x,y)\,dxdy = \lambda \iint_R f(x,y)\,dxdy. \tag{3}$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Θεωρούμε μια διαμέριση του R σε ορθογώνια $R_{i,j}$, σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann της λf και κάνουμε πράξεις σ' αυτό ώστε να προκύψει το αντίστοιχο άθροισμα Riemann της f:

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} \lambda f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j = \lambda \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \lambda \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

όταν $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \approx 0$ και $\max_{1\le j\le m}\Delta y_j \approx 0$. Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα ισχύει διότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο R. Άρα το άθροισμα Riemann της λf προσεγγίζει τον αριθμό $\lambda \iint_R f(x,y)\,dxdy$ και, επομένως, η λf είναι ολοκληρώσιμη στο R και το ολοκλήρωμά της στο R είναι ίσο με αυτόν τον αριθμό, δηλαδή ισχύει η σχέση (3).

Άλλη ιδιότητα.

Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο R και ισχύει $f(x,y) \le g(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in R$, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \le \iint_R g(x,y)\,dxdy. \tag{4}$$

Για την απόδειξη θεωρούμε μια διαμέριση του R σε ορθογώνια $R_{i,j}$, σχηματίζουμε τα αθροίσματα Riemann των f, g και τα συγκρίνουμε:

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i,j=1}^{n,m} g(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j,$$

διότι ισχύει $f(\xi_{i,j}) \le g(\xi_{i,j})$ για κάθε i, j. Επειδή $\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R f(x,y)\,dxdy$ και $\sum_{i,j=1}^{n,m} g(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R g(x,y)\,dxdy$ όταν $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \approx 0$ και $\max_{1\le j\le m}\Delta y_j \approx 0$, από την ανισοτική σχέση ανάμεσα στα αθροίσματα Riemann περνάμε στην ανισοτική σχέση (4) ανάμεσα στα ολοκληρώματα.

Άλλη ιδιότητα.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο R τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και ισχύει

$$\Big|\iint_R f(x,y)\,dxdy\Big| \le \iint_R |f(x,y)|\,dxdy. \tag{5}$$

Δεν θα αποδείξουμε ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο R, διότι η απόδειξη είναι αρκετά περίπλοκη. Αλλά, υποθέτοντας ότι και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, θα δούμε ότι η ανισότητα (5) είναι απλή εφαρμογή της (4). Πράγματι, επειδή ισχύει $-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$ για κάθε $(x,y) \in R$, συνεπάγεται

$$-\iint_R |f(x,y)|\,dxdy \le \iint_R f(x,y)\,dxdy \le \iint_R |f(x,y)|\,dxdy$$

και άρα έχουμε την (5).

Εννοείται ότι το σύμβολο $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ έχει νόημα μόνο όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο R. Γι αυτό, όταν χρησιμοποιούμε αυτό το σύμβολο, πρέπει πρώτα να έχουμε αποδείξει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο R. Συνήθως μια τέτοια απόδειξη είναι αρκετά περίπλοκη και γι αυτό διατυπώνουμε τώρα δύο θεωρήματα που μας εξασφαλίζουν την ολοκληρωσιμότητα δύο κατηγοριών συναρτήσεων τις οποίες συναντάμε πολύ συχνά στην πράξη. Το πρώτο θεώρημα είναι:

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο ορθογώνιο R τότε είναι ολοκληρώσιμη στο R.

Το δεύτερο θεώρημα είναι γενίκευση του πρώτου.

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο ορθογώνιο R εκτός από κάποια σημεία ασυνέχειας τα οποία βρίσκονται πάνω σε κάποιες πεπερασμένου πλήθους καμπύλες μέσα στο R οι οποίες είναι γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων $y = \phi(x)$ ή $x = \psi(y)$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x,y) = x^2y + x$ είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$ και άρα είναι ολοκληρώσιμη σε οποιοδήποτε ορθογώνιο R. Δεύτερο παράδειγμα είναι η συνάρτηση f που ορίζεται στο ορθογώνιο $R = [0,3] \times [0,4]$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + xy, & (x,y) \in R, x+y \geq 1 \\ xy^2, & (x,y) \in R, x+y < 1 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο R εκτός από τα σημεία του R που βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $x + y = 1$. Αυτά τα σημεία ασυνέχειας της f βρίσκονται όλα πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \phi(x) = 1 - x$ για $x \in [0,1]$ (αλλά συγχρόνως και γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = \psi(y) = 1 - y$ για $y \in [0,1]$). Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.

Αφού οι συναρτήσεις f στα δύο αυτά παραδείγματα είναι ολοκληρώσιμες προκύπτει το ερώτημα: πώς υπολογίζουμε τα ολοκληρώματά τους; Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων σπάνια βασιζόμαστε στον ορισμό του ολοκληρώματος (ως όριο αθροισμάτων Riemann). Είναι πολύ πιο πρακτικό να εφαρμόσουμε το επόμενο **θεώρημα του Fubini** το οποίο έχει δύο μορφές. Η πρώτη μορφή:

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο $R = [a,b] \times [c,d]$ και για κάθε $x \in [a,b]$ η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του y) στο διάστημα $[c,d]$ και η $\int_c^d f(x,y)\,dy$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του x) στο διάστημα $[a,b]$, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big) dx. \tag{6}$$

Και η δεύτερη μορφή:

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο $R = [a,b] \times [c,d]$ και για κάθε $y \in [c,d]$ η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του x) στο διάστημα $[a,b]$ και η $\int_a^b f(x,y)\,dx$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του y) στο διάστημα $[c,d]$, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big) dy. \tag{7}$$

Συνήθως ισχύουν ταυτόχρονα οι προϋποθέσεις και για τις δύο συμμετρικές μορφές του θεωρήματος του Fubini και τότε έχουμε την διπλή ισότητα

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big) dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big) dy.$$

Έτσι ο υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος ανάγεται στον υπολογισμό διαδοχικά δύο απλών ολοκληρωμάτων μίας μεταβλητής.

Πριν δούμε την απόδειξη του θεωρήματος του Fubini, ας το εφαρμόσουμε για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων στα δύο παραπάνω παραδείγματα. Στο πρώτο παράδειγμα η f είναι συνεχής στο ορθογώνιο $R = [0,3] \times [1,4]$ και άρα ολοκληρώσιμη στο R. Επίσης, για κάθε

$x \in [0,3]$ η $f(x,y) = x^2y + x$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του y στο $[1,4]$ (με σταθερό x) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[1,4]$. Για κάθε $x \in [0,3]$ υπολογίζουμε

$$\int_1^4 (x^2y + x)\,dy = (x^2y^2/2 + xy)\Big|_1^4 = (8x^2 + 4x) - (x^2/2 + x) = 15x^2/2 + 3x.$$

Τώρα, επειδή η $\int_1^4 (x^2y+x)\,dy = 15x^2/2+3x$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη ως συνάρτηση του x στο $[0,3]$, από τον τύπο (6) έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2y + x)\,dxdy &= \int_0^3 \Big(\int_1^4 (x^2y + x)\,dy\Big)dx = \int_0^3 (15x^2/2 + 3x)\,dx \\ &= (5x^3/2 + 3x^2/2)\Big|_0^3 = 135/2 + 27/2 = 81.\end{aligned}$$

Ομοίως, για κάθε $y \in [1,4]$ η $f(x,y) = x^2y + x$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του x στο $[0,3]$ (με σταθερό y) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[0,3]$. Για κάθε $y \in [1,4]$ υπολογίζουμε

$$\int_0^3 (x^2y + x)\,dx = (x^3y/3 + x^2/2)\Big|_0^3 = 9y + 9/2.$$

Επειδή η $\int_0^3 (x^2y + x)\,dx = 9y + 9/2$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη ως συνάρτηση του y στο $[1,4]$, από τον τύπο (7) έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2y + x)\,dxdy &= \int_1^4 \Big(\int_0^3 (x^2y + x)\,dx\Big)dy = \int_1^4 (9y + 9/2)\,dy \\ &= (9y^2/2 + 9y/2)\Big|_1^4 = 90 - 9 = 81.\end{aligned}$$

Και με τους δύο τύπους βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα: απολύτως φυσιολογικό και αναμενόμενο διότι το ολοκλήρωμα πρέπει να έχει μόνο μία τιμή.

Ας δούμε το δεύτερο παράδειγμα με την συνάρτηση f στο ορθογώνιο $R = [0,3] \times [0,4]$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + xy, & (x,y) \in R, x + y \geq 1 \\ xy^2, & (x,y) \in R, x + y < 1 \end{cases}$$

Είδαμε ήδη ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο R. Ας πάρουμε ένα $x \in [0,3]$. Αν $x \in [1,3]$, τότε ισχύει $f(x,y) = x^2 + xy$ για κάθε $y \in [0,4]$ (διότι $x + y \geq 1$), οπότε η $f(x,y) = x^2 + xy$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του y στο $[0,4]$ (με σταθερό x) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[0,4]$. Μάλιστα,

$$\int_0^4 f(x,y)\,dy = \int_0^4 (x^2 + xy)\,dy = (x^2y + xy^2/2)\Big|_0^4 = 4x^2 + 8x, \qquad \text{όταν } x \in [1,3].$$

Τώρα έστω $x \in [0,1)$. Τότε $f(x,y) = xy^2$ για $y \in [0, 1-x)$ (διότι $x + y < 1$) και $f(x,y) = x^2 + xy$ για $y \in [1-x, 4]$ (διότι $x + y \geq 1$). Δηλαδή η f είναι τμηματικά συνεχής ως συνάρτηση του y στο $[0,4]$ και άρα ολοκληρώσιμη στο $[0,4]$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x,y)\,dy &= \int_0^{1-x} xy^2\,dy + \int_{1-x}^4 (x^2 + xy)\,dy = (xy^3/3)\Big|_0^{1-x} + (x^2y + xy^2/2)\Big|_{1-x}^4 \\ &= 53x/6 + x^2 + 5x^3/2 - x^4/3, \qquad \text{όταν } x \in [0,1).\end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση $\int_0^4 f(x,y)\,dy$ έχει διπλό τύπο ως συνάρτηση του x στο $[0,3]$: είναι ίση με $53x/6 + x^2 + 5x^3/2 - x^4/3$ στο $[0,1)$ και ίση με $4x^2 + 8x$ στο $[1,3]$. Άρα είναι τμηματικά συνεχής (και μάλιστα συνεχής!) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[0,3]$ και από τον τύπο (6) έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dxdy &= \int_0^3\Big(\int_0^4 f(x,y)\,dy\Big)dx\\ &= \int_0^1\Big(\int_0^4 f(x,y)\,dy\Big)dx + \int_1^3\Big(\int_0^4 f(x,y)\,dy\Big)dx\\ &= \int_0^1 (53x/6 + x^2 + 5x^3/2 - x^4/3)\,dx + \int_1^3 (4x^2+8x)\,dx\\ &= (53x^2/12 + x^3/3 + 5x^4/8 - x^5/15)\Big|_0^1 + (4x^3/3+4x^2)\Big|_1^3 = -1/40.\end{aligned}$$

Το ίδιο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί (και θα βρεθεί το ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα) και με τον τύπο $\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_0^4\big(\int_0^3 f(x,y)\,dx\big)dy$, αλλά ας το κάνει ο αναγνώστης.

Ας δούμε τώρα μια κάπως πρόχειρη απόδειξη του θεωρήματος του Fubini στην πρώτη μορφή του, την ισότητα (6). Η (7) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. Θεωρούμε μια πολύ λεπτή διαμέριση του ορθογωνίου R σε ορθογώνια $R_{i,j}$ η οποία προκύπτει από μια πολύ λεπτή διαμέριση $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ του διαστήματος $[a,b]$ στον x-άξονα και από μια πολύ λεπτή διαμέριση $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$ του διαστήματος $[c,d]$ στον y-άξονα. Επίσης, θεωρούμε ενδιάμεσα σημεία $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ για $1 \le i \le n$ και ενδιάμεσα σημεία $\zeta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ για $1 \le j \le m$. Τότε το σημείο $\xi_{i,j} = (\eta_i, \zeta_j)$ ανήκει στο ορθογώνιο $R_{i,j}$ και σχηματίζουμε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j &= \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\eta_i,\zeta_j)\,\Delta x_i\Delta y_j\\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} f(\eta_i,\zeta_j)\,\Delta x_i\Delta y_j\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} f(\eta_i,\zeta_j)\,\Delta y_j\Big)\Delta x_i.\end{aligned}$$

Επειδή η διαμέριση $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$ είναι πολύ λεπτή, έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{m} f(\eta_i,\zeta_j)\,\Delta y_j \approx \int_c^d f(\eta_i,y)\,dy.$$

(Εδώ έχουμε σταθερή τιμή $x = \eta_i$ για το x και ολοκλήρωμα στο διάστημα $[c,d]$ της $f(\eta_i,y)$ ως συνάρτησης του y.) Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i\Delta y_j \approx \sum_{i=1}^{n}\Big(\int_c^d f(\eta_i,y)\,dy\Big)\Delta x_i.$$

Αν ορίσουμε συνάρτηση με τύπο $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ για $x \in [a,b]$, τότε η τελευταία προσεγγιστική ισότητα γράφεται

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i\Delta y_j \approx \sum_{i=1}^{n} g(\eta_i)\,\Delta x_i$$

και, επειδή έχουμε υποθέσει ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και η διαμέριση $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ είναι πολύ λεπτή, συνεπάγεται

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i\Delta y_j \approx \sum_{i=1}^{n} g(\eta_i)\,\Delta x_i \approx \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)dx.$$

Από την άλλη μεριά, επειδή η διαμέριση του R στα ορθογώνια $R_{i,j}$ είναι πολύ λεπτή και η f είναι ολοκληρώσιμη στο R, έχουμε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\, \Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R f(x,y)\, dxdy.$$

Από τις δύο τελευταίες προσεγγιστικές ισότητες βλέπουμε ότι το άθροισμα Riemann της f στο R προσεγγίζει το $\iint_R f(x,y)\, dxdy$ αλλά και το $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$ και άρα αυτά τα δύο πρέπει να είναι ίσα. Έτσι αποδείξαμε τον τύπο (6).

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει την έννοια του διπλού ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης ορισμένης σε ορθογώνιο, έχουμε δει μερικές ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος σε ορθογώνιο καθώς και τον τύπο του Fubini που χρησιμεύει για τον υπολογισμό διπλού ολοκληρώματος σε ορθογώνιο. Τώρα θα δούμε πώς ορίζεται η έννοια του διπλού ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης σε γενικότερο χωρίο του $\mathbb{R}^2$.

Έστω D ένα χωρίο του $\mathbb{R}^2$ και πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ ορισμένη στο D. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο R αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει το χωρίο D και ορίζουμε την επέκταση της f η οποία είναι ταυτοτικά ίση με 0 μέσα στο R και έξω από το D, δηλαδή την συνάρτηση $f^* : D \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο D όταν η f^* είναι ολοκληρώσιμη στο R και σ' αυτήν την περίπτωση ορίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα της f στο D με τον τύπο

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy := \iint_R f^*(x,y)\, dxdy. \tag{8}$$

Θα συγκεκριμενοποιήσουμε αυτόν τον ορισμό σε δύο χαρακτηριστικές και απλές περιπτώσεις χωρίων D.

Θεωρούμε κατ' αρχάς χωρία D *πρώτου τύπου*, τα οποία περιγράφονται ως εξής. Παίρνουμε δύο πραγματικές συναρτήσεις $y = \phi_1(x)$ και $y = \phi_2(x)$ ορισμένες και *συνεχείς* στο ίδιο διάστημα $[a,b]$ και υποθέτουμε ότι ισχύει

$$\phi_1(x) \le \phi_2(x) \qquad \text{για } x \in [a,b].$$

Δηλαδή το γράφημα της ϕ_1 βρίσκεται κάτω από το γράφημα της ϕ_2 στο xy-επίπεδο και το χωρίο D το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στις δυο αυτές (συνεχείς) καμπύλες λέμε ότι είναι χωρίο πρώτου τύπου:

$$D = \{(x,y) \,|\, a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}.$$

Το χωρίο πρώτου τύπου D μπορούμε να το περιγράψουμε γεωμετρικά ως εξής. Θεωρούμε μια μεταβλητή κατακόρυφη ευθεία η οποία τέμνει τον x-άξονα στο μεταβλητό σημείο x. Όταν $x < a$ η κατακόρυφη ευθεία δεν τέμνει το D. Ομοίως, όταν $x > b$ η κατακόρυφη ευθεία δεν τέμνει το D. Όταν $a \le x \le b$ η κατακόρυφη ευθεία τέμνει το D σε ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο έχει ως κάτω άκρο το σημείο $(x, \phi_1(x))$, ως άνω άκρο το σημείο $(x, \phi_2(x))$ και, επομένως, τα σημεία του είναι ακριβώς όλα τα (x,y) με $\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$. Όλα μαζί τα κάτω σημεία των μεταβλητών κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(x, \phi_1(x))$ για $x \in [a,b]$, σχηματίζουν την καμπύλη που αποτελεί την κάτω πλευρά του D. Ενώ όλα μαζί τα πάνω σημεία των μεταβλητών κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(x, \phi_2(x))$ για $x \in [a,b]$, σχηματίζουν την καμπύλη που αποτελεί την πάνω πλευρά του D. Καθώς το x αυξάνεται στο $[a,b]$, το αντίστοιχο κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα "σαρώνει" το χωρίο D από αριστερά προς δεξιά.

Υποθέτουμε ότι σ' αυτό το χωρίο D είναι ορισμένη μια πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ και θα βρούμε έναν χρήσιμο τύπο για τον υπολογισμό του ολοκληρώματός της. Παίρνουμε ένα ορθογώνιο $R = [a', b'] \times [c', d']$ το οποίο περιέχει το χωρίο D. Για να ισχύει αυτό πρέπει να είναι $a' \leq a$, $b \leq b'$, το c' να μην είναι μεγαλύτερο από την ελάχιστη τιμή της ϕ_1 στο $[a, b]$ και το d' να μην είναι μικρότερο από την μέγιστη τιμή της ϕ_2 στο $[a, b]$. Ορίζουμε την επέκταση f^* της f όπως πριν. Βάσει του ορισμού έχουμε τον τύπο (8) και, σύμφωνα με τον τύπο (6) του Fubini,

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_{a'}^{b'} \Big(\int_{c'}^{d'} f^*(x, y)\, dy \Big) dx. \tag{9}$$

Αν $x \in [a', a)$, τότε για κάθε $y \in [c', d']$ το σημείο (x, y) είναι στο R αλλά έξω από το D και άρα $f^*(x, y) = 0$. Επομένως,

$$\int_{c'}^{d'} f^*(x, y)\, dy = \int_{c'}^{d'} 0\, dy = 0 \qquad \text{αν } x \in [a', a). \tag{10}$$

Ομοίως, αν $x \in (b, b']$, τότε για κάθε $y \in [c', d']$ το σημείο (x, y) είναι στο R αλλά έξω από το D και άρα $f^*(x, y) = 0$. Επομένως,

$$\int_{c'}^{d'} f^*(x, y)\, dy = \int_{c'}^{d'} 0\, dy = 0 \qquad \text{αν } x \in (b, b']. \tag{11}$$

Κατόπιν, αν $x \in [a, b]$, τότε οι τιμές της $f^*(x, y)$ ως συνάρτησης του y στο διάστημα $[c', d']$ (με σταθερό το x) είναι τριών ειδών. Αν $y \in [c', \phi_1(x))$, τότε το σημείο (x, y) είναι εκτός του D, οπότε $f^*(x, y) = 0$. Αν $y \in (\phi_2(x), d']$, τότε πάλι το σημείο (x, y) είναι εκτός του D, οπότε $f^*(x, y) = 0$. Τέλος, αν $y \in [\phi_x(x), \phi_2(x)]$, τότε το σημείο (x, y) είναι εντός του D και άρα $f^*(x, y) = f(x, y)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{c'}^{d'} f^*(x, y)\, dy &= \int_{c'}^{\phi_1(x)} f^*(x, y)\, dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y)\, dy + \int_{\phi_2(x)}^{d'} f^*(x, y)\, dy \\ &= \int_{c'}^{\phi_1(x)} 0\, dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy + \int_{\phi_2(x)}^{d'} 0\, dy \\ &= \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \qquad \text{αν } x \in [a, b]. \end{aligned} \tag{12}$$

Από τις ισότητες (9)-(12) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)\, dxdy &= \int_{a'}^{a} \Big(\int_{c'}^{d'} f^*(x, y)\, dy \Big) dx + \int_{a}^{b} \Big(\int_{c'}^{d'} f^*(x, y)\, dy \Big) dx \\ &\quad + \int_{b}^{b'} \Big(\int_{c'}^{d'} f^*(x, y)\, dy \Big) dx \\ &= \int_{a'}^{a} 0\, dx + \int_{a}^{b} \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx + \int_{b}^{b'} 0\, dx \\ &= \int_{a}^{b} \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στον τύπο

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_{a}^{b} \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big) dx \tag{13}$$

όταν το χωρίο D είναι πρώτου τύπου: $D = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$.

Επιστρέφοντας στην γεωμετρική περιγραφή του D, μπορούμε να πούμε ότι για να υπολογίσουμε το $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ σύμφωνα με τον τύπο (13), θεωρούμε το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα που είναι η τομή του D με την κατακόρυφη ευθεία που περνάει από το $x \in [a,b]$ και ότι ολοκληρώνουμε τις τιμές της f στα σημεία (x,y) αυτού του ευθυγράμμου τμήματος, όπου το x είναι σταθερό και η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το y από $y = \phi_1(x)$ μέχρι $y = \phi_2(x)$ (η μικρότερη τιμή του y και η μεγαλύτερη τιμή του y, αντιστοίχως, στο συγκεκριμένο ευθύγραμμο τμήμα). Έτσι, για κάθε $x \in [a,b]$ βρίσκουμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$ στο αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν, καθώς το x αυξάνεται στο $[a,b]$ και το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα σαρώνει το D από αριστερά προς δεξιά, ολοκληρώνουμε τις τιμές των ολοκληρωμάτων που βρήκαμε για x από a μέχρι b και βρίσκουμε το $\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

Ας δούμε το εξής παράδειγμα. Θεωρούμε το τριγωνικό χωρίο D με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$. Το D είναι χωρίο πρώτου τύπου: η κάτω πλευρά του είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \phi_1(x) = 0$ στο x-διάστημα $[0,1]$ και η πάνω πλευρά του είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \phi_2(x) = x$ στο ίδιο x-διάστημα $[0,1]$. Το D γράφεται

$$D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y)\,dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_0^x (x^2+y)\,dy \Big) dx = \int_0^1 (x^2y + y^2/2)\Big|_0^x\,dx \\ &= \int_0^1 (x^3 + x^2/2)\,dx = (x^4/4 + x^3/6)\Big|_0^1 = 5/12.\end{aligned}$$

Τώρα θα γνωρίσουμε τα χωρία D *δεύτερου τύπου*, τα οποία περιγράφονται ως εξής. Παίρνουμε δύο πραγματικές συναρτήσεις $x = \psi_1(y)$ και $x = \psi_2(y)$ ορισμένες και *συνεχείς* στο ίδιο διάστημα $[c,d]$ και υποθέτουμε ότι ισχύει

$$\psi_1(y) \le \psi_2(y) \qquad \text{για } y \in [c,d].$$

Δηλαδή το γράφημα της ψ_1 βρίσκεται αριστερά του γραφήματος της ψ_2 στο xy-επίπεδο και το χωρίο D το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στις δυο αυτές (συνεχείς) καμπύλες λέμε ότι είναι χωρίο δεύτερου τύπου:

$$D = \{(x,y) \,|\, c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}.$$

Υποθέτουμε και ότι στο χωρίο D είναι ορισμένη μια πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$. Αν ακολουθήσουμε παρόμοια βήματα με αυτά για τα χωρία πρώτου τύπου χρησιμοποιώντας τον τύπο (7) του Fubini (αντί του (6)) θα καταλήξουμε στον εξής τύπο υπολογισμού του διπλού ολοκληρώματος της f στο D:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \Big) dy. \tag{14}$$

Το χωρίο δεύτερου τύπου D μπορούμε, όπως και ένα χωρίο πρώτου τύπου, να το περιγράψουμε γεωμετρικά ως εξής. Θεωρούμε μια μεταβλητή οριζόντια ευθεία η οποία τέμνει τον y-άξονα στο μεταβλητό σημείο y. Όταν $y < c$ η οριζόντια ευθεία δεν τέμνει το D. Ομοίως, όταν $y > d$ η οριζόντια ευθεία δεν τέμνει το D. Όταν $c \le y \le d$ η οριζόντια ευθεία τέμνει το D σε ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο έχει ως αριστερό άκρο το σημείο $(\psi_1(y), y)$, ως δεξιό άκρο το σημείο $(\psi_2(y), y)$ και, επομένως, τα σημεία του είναι ακριβώς όλα τα (x,y) με $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$. Όλα μαζί τα αριστερά σημεία των μεταβλητών οριζόντιων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(\psi_1(y), y)$ για $y \in [c,d]$, σχηματίζουν την καμπύλη που αποτελεί την αριστερή πλευρά του D. Ενώ όλα μαζί τα δεξιά σημεία των μεταβλητών οριζόντιων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(\psi_2(y), y)$ για $y \in [c,d]$, σχηματίζουν την καμπύλη που αποτελεί την δεξιά πλευρά του D. Καθώς το y αυξάνεται στο $[c,d]$, το αντίστοιχο οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα "σαρώνει" το χωρίο D από κάτω προς πάνω.

Με ανάλογη κάπως γεωμετρική γλώσσα μπορούμε να πούμε ότι για να υπολογίσουμε το $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ σύμφωνα με τον τύπο (14), θεωρούμε το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα που είναι η τομή του D με την οριζόντια ευθεία που περνάει από το $y \in [c,d]$ και ότι ολοκληρώνουμε τις τιμές της f στα σημεία (x,y) αυτού του ευθυγράμμου τμήματος, όπου το y είναι σταθερό και η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το x από $x = \psi_1(y)$ μέχρι $x = \psi_2(y)$ (η μικρότερη τιμή του x και η μεγαλύτερη τιμή του x, αντιστοίχως, στο συγκεκριμένο ευθύγραμμο τμήμα). Έτσι, για κάθε $y \in [c,d]$ βρίσκουμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$ στο αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν, καθώς το y αυξάνεται στο $[c,d]$ και το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα σαρώνει το D από κάτω προς πάνω, ολοκληρώνουμε τις τιμές των ολοκληρωμάτων που βρήκαμε για y από c μέχρι d και βρίσκουμε το $\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

Το τριγωνικό χωρίο D με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$ που είδαμε στο αμέσως προηγούμενο παράδειγμα είναι και χωρίο δεύτερου τύπου: η αριστερή πλευρά του είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = \psi_1(y) = y$ στο y-διάστημα $[0,1]$ και η δεξιά πλευρά του είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = \psi_2(y) = 1$ στο ίδιο y-διάστημα $[0,1]$. Το D γράφεται

$$D = \{(x,y)\,|\,0 \le y \le 1, y \le x \le 1\}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y)\,dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_y^1 (x^2+y)\,dx\Big)dy = \int_0^1 (x^3/3+xy)\Big|_y^1\,dy \\ &= \int_0^1 (1/3+y-y^3/3-y^2)\,dy = (y/3+y^2/2-y^4/12-y^3/3)\Big|_0^1 = 5/12.\end{aligned}$$

2η εβδομάδα.

Οι ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος συνάρτησης σε ορθογώνιο ισχύουν και για το διπλό ολοκλήρωμα σε γενικότερο χωρίο.

Όταν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο χωρίο D τότε και η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy. \tag{15}$$

Η απόδειξη βασίζεται στην ίδια ιδιότητα για ορθογώνιο. Θεωρούμε ορθογώνιο R το οποίο περιέχει το χωρίο D και τις συναρτήσεις f^* και g^* οι οποίες είναι ίσες με τις f και g αντιστοίχως στο D και ίσες με 0 στο $R \setminus D$. Τότε έχουμε ότι στο D ισχύει $f^* + g^* = f + g$ και ότι στο $R \setminus D$ ισχύει $f^* + g^* = 0 + 0 = 0$. Άρα η συνάρτηση $f^* + g^*$ είναι ίση με την $(f + g)^*$ στο ορθογώνιο R. Επομένως, από τον ορισμό των ολοκληρωμάτων στο D έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy &= \iint_D (f+g)(x,y)\,dxdy = \iint_R (f+g)^*(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_R (f^* + g^*)(x,y)\,dxdy = \iint_R (f^*(x,y) + g^*(x,y))\,dxdy \\
&= \iint_R f^*(x,y)\,dxdy + \iint_R g^*(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy
\end{aligned}$$

και αποδείχθηκε η (15).

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι επόμενες τρεις ιδιότητες.

Όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D και λ είναι αριθμός, τότε και η λf είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\iint_D \lambda f(x,y)\,dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dxdy. \tag{16}$$

Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο χωρίο D και ισχύει $f(x,y) \leq g(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$, τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint_D g(x,y)\,dxdy. \tag{17}$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\left| \iint_D f(x,y)\,dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dxdy. \tag{18}$$

Όπως είχαμε πει στην περίπτωση ορθογωνίου, εννοείται ότι και για γενικότερο χωρίο D το σύμβολο $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ έχει νόημα μόνο όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο D. Γι αυτό, όταν χρησιμοποιούμε αυτό το σύμβολο, πρέπει πρώτα να έχουμε αποδείξει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο D. Ένα θεώρημα το οποίο εξασφαλίζει την ολοκληρωσιμότητα συνάρτησης σε χωρίο είναι το εξής:

Αν το σύνορο του χωρίου D αποτελείται απο πεπερασμένου πλήθους καμπύλες οι οποίες είναι γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων $y = \phi(x)$ ή $x = \psi(y)$ και η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο χωρίο D εκτός από κάποια σημεία ασυνέχειας τα οποία βρίσκονται πάνω σε πεπερασμένου πλήθους καμπύλες μέσα στο D οι οποίες είναι γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων $y = \phi(x)$ ή $x = \psi(y)$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο D.

Μία ακόμη ιδιότητα είναι η εξής:

Αν το χωρίο D γράφεται ως $D = D_1 \cup \ldots \cup D_k$, όπου τα χωρία $D_1, \ldots, D_k$ ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, και αν η f είναι ολοκληρώσιμη στα χωρία $D, D_1, \ldots, D_k$, τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \cdots + \iint_{D_k} f(x,y)\,dxdy. \tag{19}$$

Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ολοκλήρωμα σε χωρίο D το οποίο δεν είναι πρώτου ούτε δεύτερου τύπου, αρκεί να μπορούμε να χωρίσουμε το D σε μικρότερα χωρία $D_1, \ldots, D_k$ καθένα από τα οποία είναι πρώτου ή δεύτερου τύπου: υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα στα μικρότερα χωρία χρησιμοποιώντας τους τύπους (13) και (14), ανάλογα με την περίπτωση, και εφαρμόζουμε τον τύπο (19).

Για παράδειγμα, με $0 < a < b$, ο δακτύλιος $D = \{(x,y) \,|\, a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\}$ ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα στους κύκλους κέντρου $(0,0)$ και ακτίνων a και b, δεν είναι πρώτου ούτε δεύτερου τύπου χωρίο. Όμως, $D = D_1 \cup D_2$, όπου D_1 είναι το τμήμα του D που βρίσκεται στο άνω xy-ημιεπίπεδο και D_2 είναι το τμήμα του D που βρίσκεται στο κάτω xy-ημιεπίπεδο: $D_1 = \{(x,y) \,|\, a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2, y \ge 0\}$ και $D_2 = \{(x,y) \,|\, a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2, y \le 0\}$. Τα χωρία D_1, D_2 είναι και τα δύο πρώτου τύπου.

Όπως στην περίπτωση ορθογωνίου έτσι και για γενικότερο χωρίο D, το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας του ολοκληρώματος μη-αρνητικής συνάρτησης περιγράφεται ως εξής:

Αν η f είναι μη-αρνητική και ολοκληρώσιμη στο χωρίο D, τότε το διπλό ολοκλήρωμα της f στο D ισούται με τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο D και στο γράφημα της f.

Ας δούμε ένα χρήσιμο πόρισμα αυτής της ιδιότητας. Αν η f είναι σταθερή και ίση με 1 στο χωρίο D, τότε το στερεό που βρίσκεται ανάμεσα στο D και στο γράφημα της f είναι ένα κατακόρυφο "κυλινδρικό" στερεό με βάση το χωρίο D και ύψος ίσο με 1 και άρα ο όγκος αυτού του στερεού είναι ίσος με το εμβαδόν του D. Επομένως, έχουμε την ισότητα

$$\iint_D dxdy = A(D), \tag{20}$$

όπου με $A(D)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του D.

Είδαμε τον ορισμό της **μέσης τιμής** (ολοκληρώσιμης) συνάρτησης σε χωρίο D: είναι ο αριθμός

$$\frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Είδαμε ότι η μέση τιμή της f στο χωρίο D είναι ο αριθμός k με την εξής ιδιότητα: αν θεωρήσουμε συνάρτηση g *σταθερή* ίση με k στο D, τότε οι f, g έχουν την ίδια μέση τιμή στο D.

Κατόπιν έχουμε μερικά απλά πορίσματα των (16), (17) και (20).

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει $f(x,y) \le M$ για κάθε $(x,y) \in D$, τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \le M\,A(D).$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει $f(x,y) \ge m$ για κάθε $(x,y) \in D$, τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \ge m\,A(D).$$

Γνωρίζουμε ότι, αν το χωρίο D είναι κλειστό και φραγμένο και αν η f είναι συνεχής στο D, τότε η f έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο D. Επομένως, αν στα προηγούμενα χρησιμοποιήσουμε ως M, m την μέγιστη τιμή $\max_D(f)$ και την ελάχιστη τιμή $\min_D(f)$ της f στο D, έχουμε το εξής:

Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο χωρίο D, τότε

$$\min_D(f) \le \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\,dxdy \le \max_D(f). \tag{21}$$

Δηλαδή η μέση τιμή της f είναι ανάμεσα στην ελάχιστη τιμή της και στη μέγιστη τιμή της.

Ένα χωρίο D χαρακτηρίζεται **συνεκτικό** αν *κάθε δύο σημεία του D μπορούν να ενωθούν με μια καμπύλη η τροχιά της οποίας βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο D*. Για παράδειγμα, ένας δίσκος, ένα παραλληλόγραμμο, ένας δακτύλιος, ένα ημιεπίπεδο είναι όλα συνεκτικά χωρία ενώ η ένωση δύο δίσκων που απέχουν θετική απόσταση δεν είναι συνεκτικό σύνολο. Είναι γνωστό ότι, αν το χωρίο D είναι συνεκτικό και η f είναι συνεχής στο D, τότε η f έχει την *ιδιότητα μέσης τιμής* στο D: *αν δύο αριθμοί είναι τιμές της f σε δύο σημεία του D, τότε κάθε ενδιάμεσος αριθμός είναι κι αυτός τιμή της f σε κάποιο σημείο του D*. Εφαρμόζοντας αυτήν την ιδιότητα στους αριθμούς $\min_D(f)$ και $\max_D(f)$, οι οποίοι είναι τιμές της f σε κάποια σημεία του D, έχουμε βάσει της (21) το εξής πόρισμα:

Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο D, τότε υπάρχει σημείο $(\xi,\eta) \in D$ ώστε

$$\frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta).$$

Δηλαδή, η μέση τιμή της f στο D είναι τιμή της f σε κάποιο σημείο του D.

Ως παράδειγμα εφαρμογής της (21) εκτιμήσαμε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{1}{x+y+4}\,dxdy$, όπου D είναι ο μοναδιαίος δίσκος $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\}$. Με τις μεθόδους του Απειροστικού Λογισμού ΙΙ (κριτήριο πρώτης παραγώγου για το εσωτερικό του D και εύρεση ακροτάτων υπό συνθήκη για το σύνορο του D) υπολογίσαμε την ελάχιστη τιμή και την μέγιστη τιμή της $x+y+4$ στο D και βρήκαμε ότι

$$0 < 4-\sqrt{2} \le x+y+4 \le 4+\sqrt{2} \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in D.$$

Συνεπάγεται ότι $\frac{1}{4+\sqrt{2}} \le \frac{1}{x+y+4} \le \frac{1}{4-\sqrt{2}}$ για κάθε $(x,y) \in D$ και επειδή το εμβαδόν του D είναι ίσο με π, έχουμε βάσει της (21) ότι

$$\frac{\pi}{4+\sqrt{2}} \le \iint_D \frac{1}{x+y+4}\,dxdy \le \frac{\pi}{4-\sqrt{2}}.$$

Δηλαδή η αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος είναι ανάμεσα στους αριθμούς 0.58 και 1.215.

Κατόπιν θα ασχοληθούμε με τον *τύπο αλλαγής μεταβλητής*. Θυμόμαστε ότι για ολοκληρώματα μίας μεταβλητής ο ανάλογος τύπος έχει την μορφή

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))x'(u)\,du = \int_c^d f(x(u))\frac{dx}{du}\,du,$$

όπου $x = x(u)$ είναι συνάρτηση *με συνεχή παράγωγο* από το διάστημα $[c,d]$ στο διάστημα $[a,b]$. Η συνάρτηση $x = x(u)$ είναι η *συνάρτηση αλλαγής μεταβλητής*: από την μεταβλητή x που διατρέχει το $[a,b]$ στην μεταβλητή u που διατρέχει το $[c,d]$. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $x = x(u)$ είναι γνησίως αύξουσα και άρα $a = x(c)$ και $b = x(d)$ και επίσης ισχύει $x'(u) = \frac{dx}{du} \ge 0$ στο $[c,d]$. Αν η συνάρτηση $x = x(u)$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $a = x(d)$ και $b = x(c)$ και ισχύει $x'(u) = \frac{dx}{du} \le 0$ στο $[c,d]$, ο δε τύπος αλλαγής μεταβλητής έχει την μορφή

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_d^c f(x(u))x'(u)\,du = \int_d^c f(x(u))\frac{dx}{du}\,du.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση τα άκρα c, d δεν εμφανίζονται με την κανονική τους διάταξη (πρώτα το c και μετά το d) ως άκρα των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων και, αν θέλουμε στα ολοκληρώματα να είναι κάτω το c και πάνω το d, πρέπει να αλλάξουμε το πρόσημο μπροστά από τα ολοκληρώματα. Αυτό το κάνουμε αλλάζοντας το πρόσημο της $x'(u) = \frac{dx}{du}$ και, επειδή αυτή είναι μη-θετική, μπορούμε ισοδύναμα να την θέσουμε μέσα σε απόλυτη τιμή: $-\frac{dx}{du} = |\frac{dx}{du}|$. Άρα ο τελευταίος τύπος αλλαγής μεταβλητής γράφεται ισοδύναμα

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))|x'(u)|\,du = \int_c^d f(x(u))\Big|\frac{dx}{du}\Big|\,du.$$

Παρατηρούμε ότι ο ίδιος τύπος ισχύει και στην πρώτη περίπτωση που η $x = x(u)$ είναι γνησίως αύξουσα, αφού τότε ισχύει $\frac{dx}{du} \geq 0$ και άρα $\frac{dx}{du} = |\frac{dx}{du}|$. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τον τελευταίο τύπο ως έναν ενιαίο τύπο αλλαγής μεταβλητής και στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή που η $x = x(u)$ είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα, και όπου οι a, b και οι c, d εμφανίζονται με τη "σωστή" διάταξή τους ως άκρα ολοκλήρωσης.

Ας δούμε τώρα ποιός είναι ο ανάλογος τύπος στην περίπτωση του χώρου διάστασης ίσης με 2. Θεωρούμε ένα χωρίο E στο uv-επίπεδο και ένα χωρίο D στο xy-επίπεδο και μια απεικόνιση

$$T : E \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} D.$$

Αν γράψουμε (u, v) το ανεξάρτητο μεταβλητό σημείο στο χωρίο E και (x, y) το εξαρτημένο μεταβλητό σημείο στο χωρίο D, τότε

$$T(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$$

όπου οι μεταβλητές x, y είναι συναρτήσεις των μεταβλητών u, v:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Το **θεώρημα αλλαγής μεταβλητής** είναι το εξής:

Αν η απεικόνιση $T : E \to D$ είναι ένα-προς-ένα από το χωρίο E επί του χωρίου D και αν οι συναρτήσεις $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς u, v στο χωρίο E, τότε

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v))\Big|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\Big|\,dudv, \tag{22}$$

όπου $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα των x, y ως συναρτήσεις των u, v:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα, ειδικά ή γενικά, εφαρμογής του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.

Ένα πολύ ειδικό παράδειγμα είναι το εξής. Θεωρούμε το τρίγωνο E με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(1, 1)$ και την απεικόνιση $T : E \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$(x, y) = T(u, v) = (u, v^2), \qquad \text{δηλαδή} \quad x = x(u, v) = u, \ \ y = y(u, v) = v^2.$$

Το E βρίσκεται στο uv-επίπεδο και περιγράφεται ως εξής:

$$E = \{(u, v) \,|\, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u\}.$$

Όταν το u διατρέχει το διάστημα $[0, 1]$, το $x = u$ διατρέχει κι αυτό το διάστημα $[0, 1]$. Για σταθερό u και άρα για σταθερό $x = u$, το v διατρέχει το διάστημα $[0, u]$ και άρα το $y = v^2$ διατρέχει το διάστημα $[0,u^2]=[0,x^2]$. Άρα η T απεικονίζει το χωρίο E στο uv-επίπεδο στο χωρίο D στο xy-επίπεδο το οποίο περιγράφεται ως εξής:

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\}.$$

Το D είναι το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στον x-άξονα, στην ευθεία με εξίσωση $x=1$ και στην παραβολή με εξίσωση $y=x^2$ και είναι εύκολο να δούμε ότι η T είναι ένα-προς-ένα στο E και άρα $T:E\xrightarrow[\text{επί}]{1-1}D$. Η Ιακωβιανή ορίζουσα των συναρτήσεων $x=x(u,v)=u$, $y=y(u,v)=v^2$ είναι ίση με

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2v\end{bmatrix}=2v.$$

Άρα

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_E f(x(u,v),y(u,v))|2v|\,dudv=\iint_E f(u,v^2)2v\,dudv.$$

Επειδή το E είναι χωρίο πρώτου τύπου, το ολοκλήρωμα στο E υπολογίζεται βάσει των τύπων του Fubini και έχουμε:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=2\iint_E f(u,v^2)v\,dudv=2\int_0^1\Big(\int_0^u f(u,v^2)v\,dv\Big)du.$$

Τα υπόλοιπα είναι θέμα πράξεων και εξαρτώνται από τον τύπο της f.

Ένα πολύ γενικό και χρήσιμο παράδειγμα μιας ολόκληρης συλλογής συναρτήσεων $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ είναι οι λεγόμενες **γραμμικές συναρτήσεις**. Μια γραμμική συνάρτηση έχει τύπο

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=T\Big(\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\Big)=\begin{bmatrix}au+bv\\ cu+dv\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix},$$

όπου τα ζευγάρια (x,y) και (u,v) τα γράφουμε στη μορφή πίνακα-στήλης. Οι τύποι των x,y ως συναρτήσεις των u,v είναι

$$x=x(u,v)=au+bv,\quad y=y(u,v)=cu+dv.$$

Γνωρίζουμε ότι η γραμμική συνάρτηση T είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν $\det\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\neq 0$ και στα παρακάτω θα περιοριστούμε σ' αυτήν την περίπτωση.

Είναι γνωστό από την Γραμμική Άλγεβρα ότι μια γραμμική συνάρτηση T απεικονίζει ευθείες, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα στο uv-επίπεδο σε ευθείες, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα, αντιστοίχως, στο xy-επίπεδο. Επίσης, απεικονίζει ζεύγη παράλληλων ευθειών στο uv-επίπεδο σε ζεύγη παράλληλων ευθειών στο xy-επίπεδο. Μάλιστα, η T διατηρεί την διάταξη παράλληλων ευθειών: αν έχουμε τρεις παράλληλες ευθείες l_1,l_2,l_3 στο uv-επίπεδο και η l_2 βρίσκεται ανάμεσα στις l_1,l_3, τότε οι εικόνες τους $T(l_1),T(l_2),T(l_3)$ στο xy-επίπεδο είναι παράλληλες ευθείες και η $T(l_2)$ βρίσκεται ανάμεσα στις $T(l_1),T(l_3)$.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα παραλληλόγραμμο ή τρίγωνο E στο uv-επίπεδο και την εικόνα D του E μέσω της T στο xy-επίπεδο. Τότε το D είναι ένα παραλληλόγραμμο ή τρίγωνο, αντιστοίχως, και οι κορυφές του E απεικονίζονται στις κορυφές του D και οι πλευρές του E απεικονίζονται στις πλευρές του D. Η Ιακωβιανή ορίζουσα των συναρτήσεων $x=x(u,v)=au+bv$, $y=y(u,v)=cu+dv$ είναι ίση με

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=ad-bc,$$

δηλαδή είναι ίση με την ορίζουσα του 2×2 πίνακα της γραμμικής συνάρτησης. Άρα ο τύπος αλλαγής μεταβλητής (22) γράφεται

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=|ad-bc|\iint_E f(au+bv,cu+dv)\,dudv. \tag{23}$$

Ο τύπος αυτός είναι χρήσιμος ιδιαίτερα στην περίπτωση που το E είναι ένα ορθογώνιο στο uv-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες ή ένα τρίγωνο στο uv-επίπεδο με δύο πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.

Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο D στο xy-επίπεδο που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις $y = 2x - 1$, $y = 2x + 3$, $y = -x - 2$ και $y = -x + 4$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το $\iint_D x^2 y\, dxdy$. Ορίζουμε νέες μεταβλητές με τύπους

$$u = 2x - y, \quad v = x + y.$$

Αν λύσουμε ως προς x, y συναρτήσει των u, v έχουμε

$$x = (1/3)u + (1/3)v, \quad y = (-1/3)u + (2/3)v.$$

Έτσι ορίζεται η γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T\Big(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix} (1/3)u + (1/3)v \\ (-1/3)u + (2/3)v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση $y = 2x - 1$ είναι ισοδύναμη με την $u = 1$. Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία στο uv-επίπεδο με εξίσωση $u = 1$ απεικονίζεται μέσω της T στην ευθεία στο xy-επίπεδο με εξίσωση $y = 2x - 1$. Ομοίως, οι ευθείες στο uv-επίπεδο με εξισώσεις $u = -3$, $v = -2$ και $v = 4$ απεικονίζονται μέσω της T στις ευθείες στο xy-επίπεδο με εξισώσεις $y = 2x + 3$, $y = -x - 2$ και $y = -x + 4$, αντιστοίχως. Επομένως, το παραλληλόγραμμο E στο uv-επίπεδο που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις $u = 1$, $u = -3$, $v = -2$ και $v = 4$ απεικονίζεται στο αρχικό παραλληλόγραμμο D στο xy-επίπεδο. Τώρα, ο τύπος (23) στην συγκεκριμένη περίπτωση γράφεται

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y\, dxdy &= \Big|\Big(\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{2}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{3}\Big)\Big(-\frac{1}{3}\Big)\Big| \iint_E \Big(\frac{u+v}{3}\Big)^2 \Big(\frac{-u+2v}{3}\Big) dudv \\ &= \frac{1}{81} \iint_E (u+v)^2(-u+2v)\, dudv. \end{aligned}$$

Επειδή, όμως, το E είναι ορθογώνιο στο uv-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα με τους τύπους του Fubini και βρίσκουμε

$$\iint_D x^2 y\, dxdy = \frac{1}{81} \int_{-3}^{1} \Big(\int_{-2}^{4} (u+v)^2(-u+2v)\, dv \Big) du.$$

Τα υπόλοιπα είναι ζήτημα απλών πράξεων.

Ένα ακόμη εξαιρετικά σημαντικό παράδειγμα είναι η λεγόμενη **αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες**. Στο xy-επίπεδο γράφουμε

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

και αυτό σημαίνει ότι για το σημείο (x, y) η *πολική ακτίνα* r είναι ίση με την απόστασή του από το $(0, 0)$ και η *πολική γωνία* θ είναι ίση με την γωνία που σχηματίζει με τον θετικό x-ημιάξονα η ημιευθεία με κορυφή το $(0, 0)$ που διέρχεται από το (x, y). Το θ λογίζεται θετικό αν το μετράμε με την λεγόμενη *θετική φορά περιστροφής* γύρω από το $(0, 0)$, δηλαδή την φορά περιστροφής που είναι αντίθετη στην φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Το θ λογίζεται αρνητικό αν το μετράμε με την *αρνητική φορά περιστροφής* γύρω από το $(0, 0)$, δηλαδή την φορά περιστροφής που είναι ίδια με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Στο ίδιο σημείο $(x, y) \neq (0, 0)$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό $r > 0$ και άπειρα θ τα οποία ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π (ακέραιος αριθμός πλήρων περιστροφών). Για να περιορίσουμε την απειρία των θ διαλέγουμε ένα διάστημα μήκους 2π της μορφής $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ ή $(\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ και επιλέγουμε το (αναγκαστικά μοναδικό) θ μέσα από αυτό το διάστημα. Δύο τέτοια συνηθισμένα διαστήματα είναι το $[0, 2\pi)$ και το $(-\pi, \pi]$. Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το διάστημα $[0, 2\pi)$ ενώ αν παρίσταται ανάγκη μπορούμε να χρησιμοποιούμε και το $(-\pi, \pi]$ (ή οποιοδήποτε άλλο διάστημα μήκους 2π).

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$T : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

με τύπο

$$(x, y) = T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Η συνάρτηση T απεικονίζει την ημιευθεία στο $r\theta$-επίπεδο που διατρέχει οριζοντίως την μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ σε ύψος θ_0 στην ημιευθεία στο xy-επίπεδο με κορυφή το $(0, 0)$ η οποία σχηματίζει γωνία θ_0 με τον θετικό x-ημιάξονα. Όταν η αρχική ημιευθεία στο $r\theta$-επίπεδο ανεβαίνει από το ύψος $\theta_0 = 0$ προς το ύψος $\theta_0 = 2\pi$, η αντίστοιχη ημιευθεία στο xy-επίπεδο περιστρέφεται με την θετική φορά περιστροφής γύρω από την κορυφή της, το $(0, 0)$, κάνοντας μια πλήρη θετική περιστροφή από τον θετικό x-ημιάξονα προς τον θετικό x-ημιάξονα.

Επίσης η συνάρτηση T απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα στο $r\theta$-επίπεδο που διατρέχει την μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ σε μήκος r_0 στον κύκλο στο xy-επίπεδο με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα r_0. Όταν το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα στο $r\theta$-επίπεδο μεταφέρεται προς τα δεξιά καθώς το r_0 αυξάνεται στο $(0, +\infty)$, ο αντίστοιχος κύκλος στο xy-επίπεδο με σταθερό κέντρο $(0, 0)$ μεγαλώνει και η ακτίνα του αυξάνεται στο $(0, +\infty)$.

Επομένως, η T απεικονίζει οριζόντιες μισές ζώνες που βρίσκονται μέσα στην μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ σε γωνίες στο xy-επίπεδο με κορυφή το $(0, 0)$ και ορθογώνια που εκτείνονται κατακόρυφα μέσα στην μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ από ύψος 0 μέχρι ύψος 2π σε δακτύλιους στο xy-επίπεδο. Θεωρώντας τομές οριζόντιων μισών ζωνών και κατακόρυφων ορθογωνίων μέσα στην μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ έχουμε ότι

$$T : E \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} D, \tag{24}$$

όπου $E = \{(r, \theta) \,|\, r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ είναι ένα ορθογώνιο στην μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ και D είναι το "κυκλικό ορθογώνιο" στο xy-επίπεδο που βρίσκεται ανάμεσα στους κύκλους με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνες r_1 και r_2 και στις ημιευθείες με κορυφή $(0, 0)$ που σχηματίζουν αντίστοιχες γωνίες θ_1 και θ_2 με τον θετικό x-ημιάξονα.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα της συνάρτησης T είναι ίση με

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Άρα ο τύπος αλλαγής μεταβλητής (22) γράφεται

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta, \tag{25}$$

όταν E και D είναι τα χωρία που εμφανίζονται στην (24).

Στον τύπο (25) η εμφανιζόμενη σχέση

$$dxdy = rdrd\theta$$

προκύπτει, όπως είδαμε, από τον υπολογισμό της Ιακωβιανής ορίζουσας της συνάρτησης T που μετατρέπει πολικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές συντεταγμένες και θα θυμόμαστε αυτήν την σχέση χωρίς να κάνουμε κάθε φορά τον ίδιο υπολογισμό.

Ας δούμε δύο συγκεκριμένα παραδείγματα. Θεωρούμε το χωρίο D στο xy-επίπεδο το οποίο είναι η τομή του δίσκου κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας 2 και του δεύτερου τεταρτημορίου του xy-επιπέδου και θέλουμε να υπολογίσουμε το $\iint_D xy\, dxdy$. Βλέπουμε ότι τα σημεία του D περιγράφονται ως τα σημεία που έχουν πολική ακτίνα r η οποία κυμαίνεται στο διάστημα $[0, 2]$ και πολική γωνία θ η οποία κυμαίνεται στο διάστημα $[\pi/2, \pi]$. Άρα

$$\iint_D xy\, dxdy = \iint_E r^2 \cos\theta \sin\theta\, r\, drd\theta,$$

όπου $E = \{(r,\theta)\,|\,0 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\}$. Επομένως, από τους τύπους του Fubini έχουμε

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^2 \Big(\int_{\pi/2}^{\pi} r^3 \cos\theta \sin\theta\,d\theta\Big) dr = \int_0^2 r^3\,dr \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \sin\theta\,d\theta$$

και συνεχίζουμε κάνοντας πράξεις.

Δεύτερο παράδειγμα. Θεωρούμε το χωρίο D στο xy-επίπεδο το οποίο είναι η τομή του δακτύλιου κέντρου $(0,0)$, εσωτερικής ακτίνας 1 και εξωτερικής ακτίνας 3 και της *μη-κυρτής* γωνίας που ορίζεται από τις ημιευθείες με κορυφή το $(0,0)$ που σχηματίζουν γωνίες $\pi/4$ και $3\pi/2$ με τον θετικό x-ημιάξονα και θέλουμε να υπολογίσουμε το $\iint_D (x+y)\,dxdy$. Τα σημεία του D περιγράφονται ως τα σημεία που έχουν πολική ακτίνα r η οποία κυμαίνεται στο διάστημα $[1,3]$ και πολική γωνία θ η οποία κυμαίνεται στο διάστημα $[\pi/4, 3\pi/2]$. Άρα

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \iint_E (r\cos\theta + r\sin\theta)\,r\,drd\theta,$$

όπου $E = \{(r,\theta)\,|\,1 \leq r \leq 3, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}$. Επομένως,

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_1^3 \Big(\int_{\pi/4}^{3\pi/2} r^2(\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta\Big) dr = \int_1^3 r^2\,dr \int_{\pi/4}^{3\pi/2} (\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta$$

και συνεχίζουμε κάνοντας πράξεις.

3η εβδομάδα.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$$

στον $\mathbb{R}^3$ και μια πραγματική συνάρτηση

$$f : R \to \mathbb{R}$$

ορισμένη στο R και θα ορίσουμε το **τριπλό ολοκλήρωμα** της f στο R, με τρόπο ανάλογο του τρόπου ορισμού του διπλού ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης ορισμένης σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του $\mathbb{R}^2$, παίρνοντας, δηλαδή, αθροίσματα Riemann και το όριό τους. Θα θεωρήσουμε διαμερίσεις του παραλληλεπιπέδου R σε μικρότερα παραλληλεπίπεδα, μέσω αυτών των διαμερίσεων θα θεωρήσουμε τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann της f και μέσω αυτών των αθροισμάτων Riemann, περνώντας στο όριο, θα προκύψει το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο R.

Ξεκινάμε με μια διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$ στον x-άξονα, με μια διαμέριση του διαστήματος $[c, d]$ στον y-άξονα,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d,$$

καθώς και με μια διαμέριση του διαστήματος $[r, s]$ στον z-άξονα,

$$r = z_0 < z_1 < \ldots < z_{l-1} < z_l = s.$$

Όταν σχεδιάσουμε τα επίπεδα που τέμνουν κάθετα τον x-άξονα στα σημεία της πρώτης διαμέρισης, τα επίπεδα που τέμνουν κάθετα τον y-άξονα στα σημεία της δεύτερης διαμέρισης και τα επίπεδα που τέμνουν κάθετα τον z-άξονα στα σημεία της τρίτης διαμέρισης, σχηματίζεται μια διαμέριση του παραλληλεπιπέδου R σε nml μικρότερα παραλληλεπίπεδα

$$R_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k], \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le m, 1 \le k \le l.$$

Όσο λεπτότερες είναι οι διαμερίσεις των $[a, b]$, $[c, d]$ και $[r, s]$, δηλαδή όσο μικρότερα είναι τα

$$\max_{1 \le i \le n} \Delta x_i, \qquad \max_{1 \le j \le m} \Delta y_j, \qquad \max_{1 \le k \le l} \Delta z_k,$$

τόσο λεπτότερη λέμε ότι είναι η διαμέριση του παραλληλεπιπέδου R στα ορθογώνια $R_{i,j,k}$.

Κατόπιν, δεδομένης της διαμέρισης που θεωρήσαμε παραπάνω, θεωρούμε μέσα σε κάθε ορθογώνιο $R_{i,j,k}$ ένα τυχαίο σημείο $\xi_{i,j,k}$ και σχηματίζουμε το τριπλό άθροισμα

$$\sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} f(\xi_{i,j,k})\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} f(\xi_{i,j,k}) \text{ όγκος}(R_{i,j,k}). \tag{26}$$

Το άθροισμα αυτό ονομάζεται **άθροισμα Riemann** της f που ορίζεται από την συγκεκριμένη διαμέριση του παραλληλεπιπέδου R σε υποπαραλληλεπίπεδα $R_{i,j,k}$ και από την συγκεκριμένη επιλογή "ενδιάμεσων" σημείων $\xi_{i,j,k}$ στα $R_{i,j,k}$.

Και τώρα έχουμε τον εξής βασικό ορισμό.

*Αν όσο λεπτότερη είναι η διαμέριση του R στα υποπαραλληλεπίπεδα $R_{i,j,k}$ τόσο πιο κοντά έρχεται το άθροισμα Riemann σε κάποιον συγκεκριμένο αριθμό, τότε λέμε ότι η f είναι **(Riemann) ολοκληρώσιμη** στο R και ο αριθμός τον οποίο πλησιάζει το άθροισμα Riemann ονομάζεται **(Riemann) ολοκλήρωμα** της f στο R και συμβολίζεται*

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz \qquad \text{ή} \qquad \iiint_R f.$$

Αν, λοιπόν, η f είναι ολοκληρώσιμη στο παραλληλεπίπεδο R, τότε έχουμε

$$\sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} f(\xi_{i,j,k})\,\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \approx \iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz$$

όταν $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \approx 0$, $\max_{1\le j\le m}\Delta y_j \approx 0$ και $\max_{1\le k\le l}\Delta z_k \approx 0$ (όπου, $\approx$ σημαίνει περίπου ίσο). Ή, με άλλα λόγια,

$$\sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} f(\xi_{i,j,k})\,\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \to \iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz$$

όταν $\max_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$, $\max_{1\le j\le m}\Delta y_j \to 0$ και $\max_{1\le k\le l}\Delta z_k \to 0$.

Για να μιλήσουμε για το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας του τριπλού ολοκληρώματος πρέπει πρώτα να μιλήσουμε για την έννοια του "τετραδιάστατου όγκου τετραδιάστατου στερεού". Η πιο απλή περίπτωση για να ξεκινήσουμε είναι η περίπτωση ενός τετραδιάστατου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου

$$K = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]\times[u,v].$$

Φυσικά δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε το K, διότι αυτό βρίσκεται στον χώρο $\mathbb{R}^4$. Μπορούμε, όμως, κατ' αναλογία με τον τρισδιάστατο όγκο τρισδιάστατου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (και με το διδιάστατο εμβαδόν διδιάστατου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου) να ορίσουμε τον τετραδιάστατο όγκο του K ως το γινόμενο των μηκών των ακμών του:

$$\Omega(K) = (b-a)(d-c)(s-r)(v-u).$$

Βλέπουμε αμέσως ότι, βάσει αυτού του ορισμού, ισχύει ο κανόνας:

$$\Omega(K) = V(R)h,$$

όπου $R = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ είναι η "βάση" του K στον $\mathbb{R}^3$ και $V(K) = (b-a)(d-c)(s-r)$ είναι ο τρισδιάστατος όγκος της τρισδιάστατης βάσης και όπου $h = v-u$ είναι το ύψος του K μετρημένο στον τέταρτο άξονα του $\mathbb{R}^4$. Γενικότερα, αν ένα τετραδιάστατο στερεό M είναι η ένωση ξένων ανά δύο τέτοιων τετραδιάστατων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων K, τότε ορίζουμε τον τετραδιάστατο όγκο του M να είναι το άθροισμα των τετραδιάστατων όγκων των επιμέρους K. Ακόμη γενικότερα, αν ένα τετραδιάστατο στερεό L μπορεί να προσεγγισθεί από τέτοιου τύπου τετραδιάστατα στερεά M, τότε ορίζουμε τον τετραδιάστατο όγκο του L να είναι το όριο των τετραδιάστατων όγκων των M που προσεγγίζουν το L.

Βάσει αυτής της συζήτησης ας δούμε τώρα το γεωμετρικό περιεχόμενο του τριπλού ολοκληρώματος.

Αν η f είναι μη-αρνητική, δηλαδή αν ισχύει $f(x,y,z)\ge 0$ για κάθε $(x,y,z)\in R$, τότε ο όρος $f(\xi_{i,j,k})\,\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k = V(R_{i,j,k})f(\xi_{i,j,k})$ ισούται με τον τετραδιάστατο όγκο του τετραδιάστατου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου το οποίο έχει βάση το τρισδιάστατο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $R_{i,j,k}$ στον xyz-χώρο και ύψος $f(\xi_{i,j,k})$, δηλαδή του τετραδιάστατου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου το οποίο εκτείνεται κατακόρυφα πάνω από τον xyz-χώρο από το παραλληλεπίπεδο $R_{i,j,k}$ μέχρι το σημείο $(\xi_{i,j,k}, f(\xi_{i,j,k}))$ του γραφήματος της f. Το γράφημα της f είναι μια τρισδιάστατη επιφάνεια μέσα στον τετραδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^4$ και πάνω από το τρισδιάστατο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R (το οποίο βρίσκεται στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$). Άρα, σ' αυτήν περίπτωση, το άθροισμα Riemann (26) ισούται με τον τετραδιάστατο όγκο της ένωσης όλων αυτών των τετραδιάστατων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων. Όταν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο R και η διαμέριση είναι πολύ λεπτή τότε, αφ' ενός το άθροισμα Riemann προσεγγίζει το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο R αφ' ετέρου η ένωση των τετραδιάστατων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων προσεγγίζει το τετραδιάστατο στερεό που βρίσκεται πάνω από το τρισδιάστατο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R και κάτω από την τρισδιάστατη επιφάνεια/γράφημα της f και, επομένως, ο τετραδιάστατος όγκος της ένωσης των τετραδιάστατων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων προσεγγίζει τον τετραδιάστατο όγκο του τετραδιάστατου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο R και στο γράφημα της f. Συμπεραίνουμε ότι:

Αν η f είναι μη-αρνητική και ολοκληρώσιμη στο R, τότε το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο R ισούται με τον τετραδιάστατο όγκο του τετραδιάστατου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο R και στο γράφημα της f.

Το τριπλό ολοκλήρωμα συνάρτησης σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ιδιότητες εντελώς ανάλογες με τις ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος συνάρτησης σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οι τύποι που εκφράζουν αυτές τις ιδιότητες είναι οι ίδιοι με τους τύπους (2-5) όταν αντικαταστήσουμε το σύμβολο $\iint_R$ με το σύμβολο $\iiint_R$, τα $f(x,y), g(x,y)$ με τα $f(x,y,z), g(x,y,z)$ και το $dxdy$ με το $dxdydz$. Θα τις καταγράψουμε λίγο αργότερα μια και καλή ως ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος σε γενικότερο τρισδιάστατο χωρίο D.

Το σύμβολο $\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz$ έχει νόημα μόνο όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο παραλληλεπίπεδο R. Ένα θεώρημα που μας εξασφαλίζει την ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης είναι το εξής:

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R ή, πιο γενικά, αν η f είναι συνεχής στο R εκτός από κάποια σημεία ασυνέχειας τα οποία βρίσκονται πάνω σε κάποιες πεπερασμένου πλήθους επιφάνειες μέσα στο R οι οποίες είναι γραφήματα συνεχών συναρτήσεων $z = \phi(x,y)$ ή $y = \psi(x,z)$ ή $x = \chi(y,z)$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2y + xe^{xz}$ είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^3$ και άρα είναι ολοκληρώσιμη σε οποιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R.

Για τον υπολογισμό τριπλών ολοκληρωμάτων, όπως και για τα διπλά ολοκληρώματα, σπάνια βασιζόμαστε στον ορισμό του ολοκληρώματος (ως όριο αθροισμάτων Riemann). Συνήθως εφαρμόζουμε το επόμενο **θεώρημα του Fubini** το οποίο έχει έξι μορφές. Η πρώτη μορφή:

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $R = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ και για κάθε $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ η $f(x,y,z)$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του z) στο διάστημα $[r,s]$ και για κάθε $x \in [a,b]$ η $\int_r^s f(x,y,z)\,dz$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του y) στο διάστημα $[c,d]$ και η $\int_c^d \Big(\int_r^s f(x,y,z)\,dz\Big)dy$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του x) στο διάστημα $[a,b]$, τότε

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \Big(\int_c^d \Big(\int_r^s f(x,y,z)\,dz\Big)dy\Big)dx.$$

Η δεύτερη μορφή:

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $R = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ και για κάθε $(x,z) \in [a,b] \times [r,s]$ η $f(x,y,z)$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του y) στο διάστημα $[c,d]$ και για κάθε $x \in [a,b]$ η $\int_c^d f(x,y,z)\,dy$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του z) στο διάστημα $[r,s]$ και η $\int_r^s \Big(\int_c^d f(x,y,z)\,dy\Big)dz$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του x)

στο διάστημα $[a,b]$, τότε

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \Big(\int_r^s \Big(\int_c^d f(x,y,z)\,dy\Big)dz\Big)dx.$$

Υπάρχουν άλλες τέσσερις μορφές, τις οποίες καταγράφουμε χωρίς τις διατυπώσεις των προϋποθέσεων (διατυπώστε τις εσείς):

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \Big(\int_a^b \Big(\int_r^s f(x,y,z)\,dz\Big)dx\Big)dy.$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \Big(\int_r^s \Big(\int_a^b f(x,y,z)\,dx\Big)dz\Big)dy.$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_r^s \Big(\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y,z)\,dy\Big)dx\Big)dz.$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_r^s \Big(\int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y,z)\,dx\Big)dy\Big)dz.$$

Έτσι ο υπολογισμός τριπλού ολοκληρώματος ανάγεται με έξι διαφορετικούς τρόπους στον υπολογισμό διαδοχικά τριών απλών ολοκληρωμάτων μίας μεταβλητής. Παρατηρήστε ότι όταν βρισκόμαστε στον $\mathbb{R}^2$ έχουμε ακριβώς δύο μεταθέσεις των x,y, τις xy και yx, ενώ στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε ακριβώς έξι μεταθέσεις των x,y,z, τις xyz, xzy, yxz, yzx, zxy και zyx.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x,y,z) = xy + z$ είναι συνεχής στο παραλληλεπίπεδο $R = [0,1]\times[-1,3]\times[2,4]$ και άρα ολοκληρώσιμη στο R. Επίσης, για κάθε $(x,y) \in [0,1]\times[-1,3]$ η $f(x,y,z) = xy + z$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του z στο $[2,4]$ (με σταθερά x,y) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[2,4]$. Για κάθε $(x,y)\in[0,1]\times[-1,3]$ υπολογίζουμε

$$\int_2^4 (xy+z)\,dz = (xyz + z^2/2)\Big|_2^4 = 2xy + 6.$$

Τώρα, για κάθε $x\in[0,1]$ η $\int_2^4 (xy+z)\,dz = 2xy+6$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του y στο $[-1,3]$ (με σταθερό x) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[-1,3]$. Για κάθε $x\in[0,1]$ υπολογίζουμε

$$\int_{-1}^3 \Big(\int_2^4 (xy+z)\,dz\Big)dy = \int_{-1}^3 (2xy+6)\,dy = (xy^2+6y)\Big|_{-1}^3 = 8x+24.$$

Τέλος, η $\int_{-1}^3 \Big(\int_2^4 (xy+z)\,dz\Big)dy = 8x+24$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του x στο $[0,1]$ και άρα ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Άρα από τον πρώτο τύπο του Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}\iiint_R (xy+z)\,dxdydz &= \int_0^1 \Big(\int_{-1}^3 \Big(\int_2^4 (xy+z)\,dz\Big)dy\Big)dx = \int_0^1 (8x+24)\,dx\\ &= (4x^2+24x)\Big|_0^1 = 28.\end{aligned}$$

Πολύ συνοπτικά εφαρμόζουμε έναν οποιονδήποτε άλλον από τους συνολικά έξι τύπους του Fubini:

$$\int_{-1}^3 (xy+z)\,dy = (xy^2/2 + yz)\Big|_{-1}^3 = 4x+4z,$$

$$\int_0^1 \Big(\int_{-1}^3 (xy+z)\,dy\Big)dx = \int_0^1 (4x+4z)\,dx = (2x^2+4xz)\Big|_0^1 = 4z+2.$$

$$\begin{aligned}\iiint_R (xy+z)\,dxdydz &= \int_2^4 \Big(\int_0^1 \Big(\int_{-1}^3 (xy+z)\,dy\Big)dx\Big)dz = \int_2^4 (4z+2)\,dz\\ &= (2z^2+2z)\Big|_2^4 = 28.\end{aligned}$$

Όπως αναμενόταν, και με τους δύο τύπους βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα: το τριπλό ολοκλήρωμα πρέπει να έχει μόνο μία τιμή. Όποιον από τους υπόλοιπους τέσσερις τρόπους δοκιμάσουμε θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Τώρα θα δούμε πώς ορίζεται η έννοια του τριπλού ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης σε γενικότερο χωρίο του $\mathbb{R}^3$. Η διαδικασία θα είναι εντελώς ανάλογη της διαδικασίας ορισμού της έννοιας του διπλού ολοκληρώματος σε γενικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ από την έννοια του διπλού ολοκληρώματος σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Έστω D ένα χωρίο του $\mathbb{R}^3$ και πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ ορισμένη στο D. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει το χωρίο D και ορίζουμε την επέκταση της f η οποία είναι ταυτοτικά ίση με 0 μέσα στο R και έξω από το D, δηλαδή την συνάρτηση $f^* : D \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in D \\ 0, & (x,y,z) \in R \setminus D \end{cases}$$

Θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο D όταν η f^* είναι ολοκληρώσιμη στο R και σ' αυτήν την περίπτωση ορίζουμε το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο D με τον τύπο

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz := \iiint_R f^*(x,y,z)\,dxdydz. \tag{27}$$

Βάσει του ορισμού αυτού αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος σε γενικό χωρίο. Είναι ανάλογες των ιδιοτήτων του διπλού ολοκληρώματος που εκφράζονται από τους τύπους (15-21). Τις καταγράφουμε:

Όταν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο χωρίο D τότε και η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\iiint_D (f(x,y,z) + g(x,y,z))\,dxdydz = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_D g(x,y,z)\,dxdydz.$$

Όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο D και λ είναι αριθμός, τότε και η λf είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\iiint_D \lambda f(x,y,z)\,dxdydz = \lambda \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο D και ισχύει $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ για κάθε $(x,y,z) \in D$, τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz \le \iiint_D g(x,y,z)\,dxdydz.$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο D τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\Big|\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz\Big| \le \iiint_D |f(x,y,z)|\,dxdydz.$$

Αν το χωρίο D γράφεται ως $D = D_1 \cup \ldots \cup D_k$, όπου τα χωρία $D_1, \ldots, D_k$ ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, και αν η f είναι ολοκληρώσιμη στα χωρία $D, D_1, \ldots, D_k$, τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \cdots + \iiint_{D_k} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Αν η f είναι μη-αρνητική και ολοκληρώσιμη στο χωρίο D, τότε το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο D ισούται με τον τετραδιάστατο όγκο του τετραδιάστατου στερεού που βρίσκεται στον τετραδιάστατο χώρο ανάμεσα στο τρισδιάστατο D και στο τρισδιάστατο γράφημα της f.

Το τριπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1 στο χωρίο D ισούται με τον (τρισδιάστατο) όγκο του D:

$$\iiint_D dxdydz = V(D),$$

όπου με $V(D)$ συμβολίζουμε τον όγκο του D.

Η **μέση τιμή** (ολοκληρώσιμης) συνάρτησης f σε χωρίο D στον $\mathbb{R}^3$ είναι ο αριθμός

$$\frac{1}{V(D)}\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει $f(x,y,z)\leq M$ για κάθε $(x,y,z)\in D$, τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz \leq M\,V(D).$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει $f(x,y,z)\geq m$ για κάθε $(x,y,z)\in D$, τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz \geq m\,V(D).$$

Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο χωρίο D, τότε

$$\min_D(f) \leq \frac{1}{V(D)}\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz \leq \max_D(f).$$

Δηλαδή η μέση τιμή της f είναι ανάμεσα στην ελάχιστη τιμή της και στη μέγιστη τιμή της.

Όπως και στην περίπτωση των διδιάστατων χωρίων, ένα χωρίο D στον $\mathbb{R}^3$ χαρακτηρίζεται **συνεκτικό** αν *κάθε δύο σημεία του D μπορούν να ενωθούν με μια καμπύλη η τροχιά της οποίας βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο D*. Τώρα, αν το D είναι συνεκτικό και η f είναι συνεχής στο D, τότε η f έχει την *ιδιότητα μέσης τιμής* στο D: *αν δύο αριθμοί είναι τιμές της f σε δύο σημεία του D, τότε κάθε ενδιάμεσος αριθμός είναι κι αυτός τιμή της f σε κάποιο σημείο του D*. Εφαρμόζοντας αυτήν την ιδιότητα στους αριθμούς $\min_D(f)$ και $\max_D(f)$, οι οποίοι είναι τιμές της f σε κάποια σημεία του D, έχουμε το εξής πόρισμα:

Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο D, τότε υπάρχει σημείο $(\xi,\eta,\zeta)\in D$ ώστε

$$\frac{1}{V(D)}\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta).$$

Δηλαδή, η μέση τιμή της f στο D είναι τιμή της f σε κάποιο σημείο του D.

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τριπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία με τους τύπους του Fubini. Οι τύποι που θα αναφέρουμε είναι εντελώς ανάλογοι των τύπων (13) και (14) για τα διπλά ολοκληρώματα στους αντίστοιχους δύο τύπους χωρίων στον $\mathbb{R}^2$. Στον $\mathbb{R}^3$ αναλογούν έξι τύποι χωρίων και έξι αντίστοιχοι τύποι του Fubini.

Θεωρούμε κατ' αρχάς χωρία D πρώτου τύπου, τα οποία περιγράφονται ως εξής:

$$D=\{(x,y,z)\,|\,a\leq x\leq b, \phi_1(x)\leq y\leq\phi_2(x), \psi_1(x,y)\leq z\leq\psi_2(x,y)\}.$$

Δηλαδή, το x διατρέχει το διάστημα $[a,b]$, κατόπιν, για κάθε $x\in[a,b]$, το y διατρέχει το διάστημα $[\phi_1(x),\phi_2(x)]$ (το οποίο εξαρτάται από το x) και, τέλος, για κάθε $x\in[a,b]$ και $y\in[\phi_1(x),\phi_2(x)]$, το z διατρέχει το διάστημα $[\psi_1(x,y),\psi_2(x,y)]$ (το οποίο εξαρτάται από τα x,y).

Το χωρίο πρώτου τύπου D μπορούμε να το περιγράψουμε γεωμετρικά ως εξής. Όταν το x διατρέχει το διάστημα $[a,b]$ και όταν, για κάθε $x\in[a,b]$, το y διατρέχει το διάστημα $[\phi_1(x),\phi_2(x)]$, τότε το ζευγάρι (x,y) διατρέχει το χωρίο $K=\{(x,y)\,|\,a\leq x\leq b, \phi_1(x)\leq y\leq\phi_2(x)\}$, το οποίο είναι ένα χωρίο πρώτου τύπου στο xy-επίπεδο. Τώρα θεωρούμε μια μεταβλητή κατακόρυφη ευθεία η οποία τέμνει κάθετα το xy-επίπεδο στο μεταβλητό σημείο (x,y). Όταν το (x,y) είναι έξω από το χωρίο K του xy-επιπέδου, η κατακόρυφη ευθεία δεν τέμνει το D. Όμως, όταν το (x,y) είναι στο K, τότε η κατακόρυφη ευθεία τέμνει το D σε ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο έχει ως κάτω άκρο το σημείο $(x,y,\psi_1(x,y))$, ως άνω άκρο το σημείο $(x,y,\psi_2(x,y))$ και, επομένως, τα σημεία του είναι ακριβώς όλα τα (x,y,z) με $\psi_1(x,y)\leq z\leq\psi_2(x,y)$. Όλα μαζί τα κάτω σημεία των μεταβλητών κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(x, y, \psi_1(x, y))$ για $(x, y) \in K$, σχηματίζουν την επιφάνεια που αποτελεί την κάτω πλευρά του D. Ενώ όλα μαζί τα πάνω σημεία των μεταβλητών κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(x, y, \psi_2(x, y))$ για $(x, y) \in K$, σχηματίζουν την επιφάνεια που αποτελεί την πάνω πλευρά του D. Καθώς το (x, y) διατρέχει το K, το αντίστοιχο κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα "σαρώνει" το χωρίο D.

Αν υποθέσουμε ότι σ' αυτό το χωρίο D είναι ορισμένη μια πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο D, τότε

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \Big(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \Big) dy \Big) dx$$

όταν $D = \{(x, y, z) \,|\, a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)\}$.

Υπάρχουν άλλοι πέντε ανάλογοι τύποι χωρίων και αντίστοιχοι τύποι του Fubini. Τους καταγράφουμε συνοπτικά:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \Big(\int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \Big) dz \Big) dx$$

όταν $D = \{(x, y, z) \,|\, a \le x \le b, \phi_1(x) \le z \le \phi_2(x), \psi_1(x, z) \le y \le \psi_2(x, z)\}$.

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_c^d \Big(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \Big(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \Big) dx \Big) dy$$

όταν $D = \{(x, y, z) \,|\, c \le y \le d, \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y), \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)\}$.

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_c^d \Big(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \Big(\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \Big) dz \Big) dy$$

όταν $D = \{(x, y, z) \,|\, c \le y \le d, \phi_1(y) \le z \le \phi_2(y), \psi_1(y, z) \le x \le \psi_2(y, z)\}$.

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_r^s \Big(\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \Big(\int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \Big) dx \Big) dz$$

όταν $D = \{(x, y, z) \,|\, r \le z \le s, \phi_1(z) \le x \le \phi_2(z), \psi_1(x, z) \le y \le \psi_2(x, z)\}$.

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \int_r^s \Big(\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \Big(\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \Big) dy \Big) dz$$

όταν $D = \{(x, y, z) \,|\, r \le z \le s, \phi_1(z) \le y \le \phi_2(z), \psi_1(y, z) \le x \le \psi_2(y, z)\}$.

Ας δούμε το εξής παράδειγμα. Θεωρούμε το φραγμένο χωρίο D στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τα επίπεδα με εξισώσεις $z = 0$, $z = \pi$, $x = 0$, $y = 0$ και $x + y = 1$ και θα υπολογίσουμε το $\iiint_D x^2 y \cos z\, dxdydz$. Από τις τρεις τελευταίες εξισώσεις βλέπουμε ότι το σημείο (x, y) βρίσκεται στο τρίγωνο K του xy-επιπέδου με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$. Επίσης, βλέπουμε ότι το z είναι ανάμεσα στους αριθμούς 0 και π. Άρα το χωρίο D είναι ένα κατακόρυφο κυλινδρικό χωρίο που έχει ως βάση το τρίγωνο K και ως οροφή το παράλληλο προς το K τρίγωνο σε ύψος π. Το D περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x, y, z) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le \pi\}.$$

Άρα το D είναι πρώτου τύπου με $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = 1 - x$, $\psi_1(x, y) = 0$ και $\psi_2(x, y) = \pi$. Επομένως

$$\iiint_D x^2 y \cos z\, dxdydz = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \Big(\int_0^{\pi} x^2 y \cos z\, dz \Big) dy \Big) dx.$$

Υπολογίζουμε

$$\int_0^{\pi} x^2 y \cos z \, dz = x^2 y \int_0^{\pi} \cos z \, dz = x^2 y \sin z \Big|_0^{\pi} = 0$$

και άρα

$$\iiint_D x^2 y \cos z \, dxdydz = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} 0 \, dy \Big) dx = \int_0^1 0 \, dx = 0.$$

Το ίδιο χωρίο D περιγράφεται και με άλλο τρόπο:

$$D = \{(x, y, z) \,|\, 0 \le z \le \pi, 0 \le y \le 1, 0 \le x \le 1 - y\},$$

όπου $\phi_1(z) = 0$, $\phi_2(z) = 1$, $\psi_1(y, z) = 0$ και $\psi_2(y, z) = 1 - y$. Επομένως

$$\iiint_D x^2 y \cos z \, dxdydz = \int_0^{\pi} \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} x^2 y \cos z \, dx \Big) dy \Big) dz. \tag{28}$$

Υπολογίζουμε

$$\int_0^{1-y} x^2 y \cos z \, dx = y \cos z \int_0^{1-y} x^2 \, dx = y \cos z (x^3/3) \Big|_0^{1-y} = y \cos z (1 - y)^3/3,$$

κατόπιν,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} x^2 y \cos z \, dx \Big) dy &= (\cos z)/3 \int_0^1 y(1 - y)^3 \, dy \\ &= (\cos z)/3 \int_0^1 (y - 3y^2 + 3y^3 - y^4) \, dy = (\cos z)/60\end{aligned}$$

και άρα

$$\iiint_D x^2 y \cos z \, dxdydz = 1/60 \int_0^{\pi} \cos z \, dz = 0.$$

Ένα σχόλιο. Μπορούμε να αποφύγουμε αρκετές από τις τελευταίες πράξεις αν παρατηρήσουμε ότι στο δεξιό μέρος της σχέσης (28) ο όρος $\cos z$ δεν εξαρτάται από τα x, y και άρα μπορεί να βγει έξω από τα δύο εσωτερικά ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} x^2 y \cos z \, dx \Big) dy = \cos z \int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} x^2 y \, dx \Big) dy = a \cos z,$$

όπου ο αριθμός $a = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} x^2 y \, dx \Big) dy$ είναι ένας σταθερός αριθμός ανεξάρτητος του z (και φυσικά των x, y). Άρα η σχέση (28) γίνεται

$$\iiint_D x^2 y \cos z \, dxdydz = \int_0^{\pi} a \cos z \, dz = a \int_0^{\pi} \cos z \, dz = a0 = 0.$$

Το αποτέλεσμα 0 είναι ανεξάρτητο της τιμής του a και άρα δεν χρειάζεται να υπολογισθεί η τιμή του a.

Τώρα ένα δεύτερο παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε τον όγκο μιας μπάλας ως συνάρτηση της ακτίνας της. Επειδή ο όγκος της μπάλας δεν εξαρτάται από την θέση της, θα υποθέσουμε για απλοποίηση ότι το κέντρο της είναι το σημείο $(0, 0, 0)$ και η ακτίνα της $R > 0$. Τότε η μπάλα περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}.$$

Αν κοιτάξουμε μόνο το x, από την σχέση $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ βλέπουμε ότι το x μπορεί να πάρει όλες τις τιμές στο διάστημα $[-R, R]$. Κατόπιν, για κάθε τιμή του $x \in [-R, R]$, τα y, z ικανοποιούν την σχέση $y^2 + z^2 \le R^2 - x^2$ και άρα το y μπορεί να πάρει όλες τις τιμές στο διάστημα $[-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]$. Τέλος, για κάθε $x \in [-R, R]$ και κάθε $y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]$, το z

ικανοποιεί την σχέση $z^2 \leq R^2 - x^2 - y^2$ και άρα παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $[-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}]$. Άρα η μπάλα περιγράφεται και ως εξής:

$$D = \{(x, y, z) \,|\, -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2},$$
$$-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}.$$

Επομένως,

$$V(D) = \iiint_D dxdydz = \int_{-R}^{R} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \Big) dy \Big) dx.$$

Προφανώς,

$$\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz = 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Άρα

$$V(D) = 2\int_{-R}^{R} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy \Big) dx. \tag{29}$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα έχει την μορφή $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy$ με $a = \sqrt{R^2 - x^2} \geq 0$. Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αλλαγή μεταβλητής $y = a \sin t$:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a \cos t\, dt = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$$
$$= (a^2/2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\, dt = (a^2/4) \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos u)\, du = \pi a^2/2.$$

Άρα το εσωτερικό ολοκλήρωμα στην (29) είναι ίσο με $\pi(R^2 - x^2)/2$ και έχουμε

$$V(D) = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi(R^2 x - x^3/3)\Big|_{-R}^{R} = (4\pi/3)R^3.$$

Μπορούμε να κάνουμε τον υπολογισμό του δεξιού μέρους της (29) με έναν δεύτερο τρόπο, ίσως λίγο πιο εύκολα. Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις $-R \leq x \leq R$ και $-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ ορίζουν τον κύκλο στο xy-επίπεδο με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα R:

$$K = \{(x, y) \,|\, -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\} = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Άρα η (29) γράφεται

$$V(D) = 2\iint_K \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy.$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αλλαγής σε πολικές συντεταγμένες (r, θ), αφού ο δίσκος K αντιστοιχεί στο $r\theta$-επίπεδο στο χωρίο

$$E = \{(r, \theta) \,|\, 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Άρα (παρατηρώντας ότι $x^2 + y^2 = r^2$)

$$V(D) = 2\iint_E \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr d\theta = 2\int_0^R \Big(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, d\theta \Big) dr$$
$$= 2\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r \Big(\int_0^{2\pi} d\theta \Big) dr = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr.$$

Με αλλαγή μεταβλητής $t = R^2 - r^2$ βρίσκουμε

$$V(D) = 2\pi \int_0^{R^2} \sqrt{t}\, dt = (4\pi/3)R^3.$$

4η εβδομάδα.

Τώρα θα δούμε τον τύπο αλλαγής μεταβλητής στην περίπτωση των τριπλών ολοκληρωμάτων. Θεωρούμε ένα χωρίο E στον uvw-χώρο και ένα χωρίο D στον xyz-χώρο και μια απεικόνιση

$$T : E \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} D.$$

Αν (u, v, w) είναι το ανεξάρτητο μεταβλητό σημείο στο χωρίο E και (x, y, z) το εξαρτημένο μεταβλητό σημείο στο χωρίο D, τότε

$$T(u, v, w) = (x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

όπου οι μεταβλητές x, y, z είναι συναρτήσεις των μεταβλητών u, v, w:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Το **θεώρημα αλλαγής μεταβλητής** είναι το εξής:

Αν η απεικόνιση $T : E \to D$ είναι ένα-προς-ένα από το χωρίο E επί του χωρίου D και αν οι συναρτήσεις $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς u, v, w στο χωρίο E, τότε

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\Big|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\Big|\, dudvdw, \tag{30}$$

όπου $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα των x, y, z ως συναρτήσεις των u, v, w:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Όπως και στην περίπτωση των διπλών ολοκληρωμάτων, ένα πολύ γενικό και χρήσιμο παράδειγμα μιας ολόκληρης συλλογής συναρτήσεων $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι οι **γραμμικές συναρτήσεις**. Μια γραμμική συνάρτηση έχει τύπο

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} au + bv + cw \\ du + ev + hw \\ ku + lv + mw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & h \\ k & l & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

όπου τις τριάδες (x, y, z) και (u, v, w) τις γράφουμε στη μορφή πίνακα-στήλης και A είναι ο 3×3 πίνακας $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & h \\ k & l & m \end{bmatrix}$. Οι τύποι των x, y, z ως συναρτήσεις των u, v, w είναι

$$x = x(u, v, w) = au + bv + cw, \quad y = y(u, v, w) = du + ev + hw, \quad z = z(u, v, w) = ku + lv + mw.$$

Η γραμμική συνάρτηση T είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν $\det A \neq 0$ και αυτή θα είναι η υπόθεσή μας στα παρακάτω.

Είναι γνωστό από την Γραμμική Άλγεβρα ότι μια γραμμική συνάρτηση T απεικονίζει ευθείες, επίπεδα, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα, παραλληλεπίπεδα στον uvw-χώρο σε ευθείες, επίπεδα, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα, παραλληλεπίπεδα, αντιστοίχως, στον xyz-χώρο. Επίσης, απεικονίζει ζεύγη παράλληλων ευθειών στον uvw-χώρο σε ζεύγη παράλληλων ευθειών στον xyz-χώρο και ζεύγη παράλλληλων επιπέδων στον uvw-χώρο σε ζεύγη παράλληλων επιπέδων στον xyz-χώρο. Επίσης, η T διατηρεί την διάταξη παράλληλων ευθειών: αν έχουμε τρεις παράλληλες ευθείες l_1, l_2, l_3 στον uvw-χώρο και η l_2 βρίσκεται ανάμεσα στις l_1, l_3 (και στο ίδιο επίπεδο με αυτές), τότε οι εικόνες τους $T(l_1), T(l_2), T(l_3)$ στον xyz-χώρο είναι παράλληλες ευθείες και η $T(l_2)$ βρίσκεται ανάμεσα στις $T(l_1), T(l_3)$ (και στο ίδιο επίπεδο με αυτές). Ομοίως, η T διατηρεί την διάταξη παράλληλων επιπέδων: αν έχουμε τρία παράλληλα επίπεδα L_1, L_2, L_3 στον uvw-χώρο και το L_2 βρίσκεται ανάμεσα στα L_1, L_3, τότε οι εικόνες τους $T(L_1), T(L_2), T(L_3)$ στον xyz-χώρο είναι παράλληλα επίπεδα και το $T(L_2)$ βρίσκεται ανάμεσα στα $T(L_1), T(L_3)$.

Αν τώρα πάρουμε ένα παραλληλεπίπεδο E στον uvw-χώρο και την εικόνα $D = T(E)$ του E μέσω της T στον xyz-χώρο, τότε το D είναι ένα παραλληλεπίπεδο και οι κορυφές, οι ακμές και οι πλευρές του E απεικονίζονται στις κορυφές, στις ακμές και στις πλευρές, αντιστοίχως, του D. Η Ιακωβιανή ορίζουσα των συναρτήσεων $x = x(u,v,w) = au + bv + cw$, $y = y(u,v,w) = du + ev + hw$, $z = ku + lv + mw$ είναι ίση με

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & h \\ k & l & m \end{bmatrix} = \det A,$$

δηλαδή είναι ίση με την ορίζουσα του 3×3 πίνακα A της γραμμικής συνάρτησης T. Άρα ο τύπος αλλαγής μεταβλητής (30) γράφεται

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = |\det A| \cdot \\ \cdot \iiint_E f(au + bv + cw, du + ev + hw, ku + lv + mw)\,dudvdw. \end{aligned} \tag{31}$$

Ο τύπος αυτός είναι χρήσιμος ιδιαίτερα στην περίπτωση που το E είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στον uvw-χώρο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες. Ο λόγος είναι ότι σ' αυτήν την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα τους τύπους του Fubini για το τριπλό ολοκλήρωμα στο E.

Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο D στον xyz-χώρο που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα με εξισώσεις $x + 2y + z = 4$, $x + 2y + z = -5$, $2x - y + z = -2$, $2x - y + z = 7$, $x + y + 3z = 3$ και $x + y + 3z = -2$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το $\iiint_D xy\,dxdydz$. Ορίζουμε νέες μεταβλητές με τύπους

$$u = x + 2y + z, \quad v = 2x - y + z, \quad w = x + y + 3z.$$

Έτσι ορίζεται μια γραμμική συνάρτηση $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + z \\ 2x - y + z \\ x + y + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Η αντίστροφη γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τον αντίστροφο πίνακα με τις μεθόδους της Γραμμικής Άλγεβρας (π.χ. με τη μέθοδο Gauss ή με τη μέθοδο Cramer):

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}4/11 & 5/11 & -3/11\\ 5/11 & -2/11 & -1/11\\ -3/11 & -1/11 & 5/11\end{bmatrix}$$

Άρα

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4/11 & 5/11 & -3/11\\ 5/11 & -2/11 & -1/11\\ -3/11 & -1/11 & 5/11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(4/11)u + (5/11)v - (3/11)w\\ (5/11)u - (2/11)v - (1/11)w\\ -(3/11)u - (1/11)v + (5/11)w\end{bmatrix}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} x &= (4/11)u + (5/11)v - (3/11)w\\ y &= (5/11)u - (2/11)v - (1/11)w\\ z &= -(3/11)u - (1/11)v + (5/11)w. \end{aligned}$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα στον τύπο αλλαγής μεταβλητής που θα χρησιμοποιήσουμε σε λίγο είναι η ορίζουσα του πίνακα $\begin{bmatrix}4/11 & 5/11 & -3/11\\ 5/11 & -2/11 & -1/11\\ -3/11 & -1/11 & 5/11\end{bmatrix}$ της γραμμικής συνάρτησης T και βρίσκουμε ότι αυτή είναι ίση με $-1/11$.

Παρατήρηση: Επειδή οι πίνακες $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}4/11 & 5/11 & -3/11\\ 5/11 & -2/11 & -1/11\\ -3/11 & -1/11 & 5/11\end{bmatrix}$ είναι αντίστροφοι, οι ορίζουσές τους είναι αντίστροφοι αριθμοί. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του αρχικού πίνακα, η οποία είναι ίση με -11, και να αντιστρέψουμε.

Τώρα παρατηρούμε ότι η σχέση $x + 2y + z = 4$ είναι ισοδύναμη με την $u = 4$. Αυτό σημαίνει ότι το επίπεδο στον uvw-χώρο με εξίσωση $u = 4$ απεικονίζεται μέσω της T στο επίπεδο στον xyz-χώρο με εξίσωση $x + 2y + z = 4$. Ομοίως, τα επίπεδα στον uvw-χώρο με εξισώσεις $u = -5$, $v = -2$, $v = 7$, $w = 3$ και $w = -2$ απεικονίζονται μέσω της T στα επίπεδα στον xyz-χώρο με εξισώσεις $x + 2y + z = -5$, $2x - y + z = -2$, $2x - y + z = 7$, $x + y + 3z = 3$ και $x + y + 3z = -2$, αντιστοίχως. Επομένως, το παραλληλεπίπεδο E στον uvw-χώρο που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα με εξισώσεις $u = 4$, $u = -5$, $v = -2$, $v = 7$, $w = 3$ και $w = -2$ απεικονίζεται στο αρχικό παραλληλεπίπεδο D στον xyz-χώρο και άρα ο τύπος (31) στην συγκεκριμένη περίπτωση γράφεται

$$\begin{aligned} \iiint_D xy\,dxdydz &= \frac{1}{11}\iiint_E \Big(\frac{4u + 5v - 3w}{11}\Big)\Big(\frac{5u - 2v - w}{11}\Big)dudvdw\\ &= \frac{1}{11^3}\iiint_E (4u + 5v - 3w)(5u - 2v - w)\,dudvdw. \end{aligned}$$

Τώρα, επειδή το E είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στον uvw-χώρο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα με τους τύπους του Fubini και βρίσκουμε

$$\iiint_D xy\,dxdydz = \frac{1}{11^3}\int_{-5}^{4}\Big(\int_{-2}^{7}\Big(\int_{-2}^{3}(4u + 5v - 3w)(5u - 2v - w)\,dw\Big)dv\Big)du.$$

Τα υπόλοιπα είναι ζήτημα απλών πράξεων.

Ένα ακόμη σημαντικό παράδειγμα είναι η **αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες**. Στον xyz-χώρο γράφουμε

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\phi, \quad z = \rho\cos\phi.$$

Για το σημείο (x,y,z) το ρ είναι ίσο με την απόστασή του από το $(0,0,0)$, το θ είναι ίσο με την γωνία που σχηματίζει στο xy-επίπεδο με τον θετικό x-ημιάξονα η ημιευθεία με κορυφή το $(0,0)$ που διέρχεται από το (x,y) (το οποίο είναι η κατακόρυφη προβολή του (x,y,z) στο xy-επίπεδο) και το ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει με τον θετικό z-ημιάξονα η ημιευθεία με κορυφή το $(0,0,0)$ που διέρχεται από το (x,y,z). Το ρ διατρέχει το διάστημα $(0,+\infty)$, το θ διατρέχει το διάστημα $[0,2\pi)$ και το ϕ διατρέχει το διάστημα $(0,\pi)$. Τυπικά, το ρ δεν παίρνει την τιμή 0 διότι αυτό θα σήμαινε ότι το (x,y,z) είναι το $(0,0,0)$ και τότε τα θ,ϕ δεν θα ορίζονταν. Επίσης, το ϕ δεν παίρνει τις τιμές $0,\pi$ διότι τότε το (x,y,z) θα ήταν στον z-άξονα (εκτός του σημείου $(0,0,0)$) και τότε δεν θα οριζόταν το θ. Με άλλα λόγια αποκλείουμε ολόκληρο τον z-άξονα.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$T:(0,+\infty)\times[0,2\pi)\times(0,\pi)\xrightarrow[\text{επί}]{1\text{–}1}\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}$$

με τύπο

$$(x,y,z)=T(\rho,\theta,\phi)=(\rho\cos\theta\sin\phi,\rho\sin\theta\sin\phi,\rho\cos\phi).$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα της συνάρτησης T είναι ίση με

$$\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial\phi}\\\frac{\partial y}{\partial\rho}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\phi}\\\frac{\partial z}{\partial\rho}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\phi}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\phi&-\rho\sin\theta\sin\phi&\rho\cos\theta\cos\phi\\\sin\theta\sin\phi&\rho\cos\theta\sin\phi&\rho\sin\theta\cos\phi\\\cos\phi&0&-\rho\sin\phi\end{bmatrix}=-\rho^2\sin\phi.$$

Παρατηρούμε ότι $\sin\phi\geq 0$ και άρα η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας είναι ίση με

$$\left|\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial\phi}\\\frac{\partial y}{\partial\rho}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\phi}\\\frac{\partial z}{\partial\rho}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\phi}\end{bmatrix}\right|=\rho^2\sin\phi. \tag{32}$$

Θα δούμε τώρα σε τί είδους χωρίο D στον xyz-χώρο απεικονίζει η T ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο E στον $\rho\theta\phi$-χώρο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες:

$$E=\{(\rho,\theta,\phi)\,|\,\rho_1\leq\rho\leq\rho_2,\theta_1\leq\theta\leq\theta_2,\phi_1\leq\phi\leq\phi_2\}.$$

Τα σημεία (x,y,z) για τα οποία το αντίστοιχο ρ έχει μια συγκεκριμένη τιμή είναι τα σημεία της σφαίρας S_ρ με κέντρο το $(0,0,0)$ και ακτίνα ρ. Άρα τα σημεία (x,y,z) για τα οποία το αντίστοιχο ρ παίρνει τιμές στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ είναι τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στις σφαίρες S_{ρ_1} και S_{ρ_2}. Ομοίως, τα σημεία (x,y,z) για τα οποία το αντίστοιχο θ έχει μια συγκεκριμένη τιμή είναι τα σημεία του ημιεπιπέδου L_θ το οποίο έχει ως ακμή του τον z-άξονα και περιέχει την ημιευθεία του xy-επιπέδου η οποία σχηματίσει γωνία θ με τον θετικό x-ημιάξονα. Άρα τα σημεία (x,y,z) για τα οποία το αντίστοιχο θ παίρνει τιμές στο διάστημα $[\theta_1,\theta_2]$ είναι τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στα ημιεπίπεδα L_{θ_1} και L_{θ_2}. Τέλος, τα σημεία (x,y,z) για τα οποία το αντίστοιχο ϕ έχει μια συγκεκριμένη τιμή είναι τα σημεία της κωνικής επιφάνειας K_ϕ η οποία προκύπτει με πλήρη περιστροφή γύρω από τον z-άξονα μιας οποιασδήποτε ημιευθείας με κορυφή το $(0,0,0)$ η οποία σχηματίζει γωνία ϕ με τον θετικό z-ημιάξονα. Άρα τα σημεία (x,y,z) για τα οποία το αντίστοιχο ϕ παίρνει τιμές στο διάστημα $[\phi_1,\phi_2]$ είναι τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στις κωνικές επιφάνειες K_{ϕ_1} και K_{ϕ_2}. Μετά από όλα αυτά συμπεραίνουμε ότι η T απεικονίζει το E του $\rho\theta\phi$-χώρου στο χωρίο D του xyz-χώρου που βρίσκεται ανάμεσα στις σφαίρες S_{ρ_1}, S_{ρ_2}, στα ημιεπίπεδα L_{θ_1}, L_{θ_2} και στις κωνικές επιφάνειες K_{ϕ_1}, K_{ϕ_2}. Επομένως, για τα συγκεκριμένα χωρία D και E ο τύπος αλλαγής μεταβλητής (30) με την βοήθεια της σχέσης (32) γράφεται

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz&=\iiint_E f(\rho\cos\theta\sin\phi,\rho\sin\theta\sin\phi,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho d\theta d\phi\\&=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\Big(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\Big(\int_{\phi_1}^{\phi_2}f(\rho\cos\theta\sin\phi,\rho\sin\theta\sin\phi,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\phi\Big)d\theta\Big)d\rho.\end{aligned}\tag{33}$$

Στον τύπο (33) η εμφανιζόμενη σχέση

$$dxdydz = \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi$$

προκύπτει, όπως είδαμε, από τον υπολογισμό της Ιακωβιανής ορίζουσας της συνάρτησης T που μετατρέπει σφαιρικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές συντεταγμένες και θα θυμόμαστε αυτήν την σχέση χωρίς να κάνουμε κάθε φορά τον ίδιο υπολογισμό.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Θεωρούμε την μοναδιαία μπάλα D με κέντρο το $(0,0,0)$ και θα υπολογίσουμε το $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dxdydz$. Έχουμε

$$D = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

Η μοναδική σχέση που καθορίζει το χωρίο D είναι η $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ και αυτή είναι ισοδύναμη με την $0 \le \rho \le 1$. Οι γωνίες θ και ϕ δεν έχουν κανένα περιορισμό (πέρα από το ότι βρίσκονται στα διαστήματα $[0, 2\pi]$ και $[0,\pi]$, αντιστοίχως), οπότε το χωρίο D αντιστοιχεί στο χωρίο

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) \,|\, 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi\}$$

του $\rho\theta\phi$-χώρου. Άρα

$$\begin{aligned}
\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dxdydz &= \iiint_E e^{\rho^3} \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \sin\phi \, d\phi \Big) d\theta \Big) d\rho \qquad (34) \\
&= \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi = 4\pi(e-1)/3.
\end{aligned}$$

Σημαντική παρατήρηση: Επειδή όταν χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες πρέπει να παραλείπουμε ολόκληρο τον z-άξονα και επειδή οι τιμές $\rho = 0$, $\theta = 2\pi$, $\phi = 0$ και $\phi = \pi$ δεν επιτρέπονται για τις σφαιρικές συντεταγμένες, τα χωρία D και E στο συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιήθηκαν καταχρηστικά. Από την μοναδιαία μπάλα D πρέπει να αφαιρέσουμε την διάμετρό της η οποία βρίσκεται πάνω στον z-άξονα και να θεωρήσουμε το χωρίο

$$D^* = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\} \setminus \{(0,0,z) \,|\, -1 \le z \le 1\}.$$

Επίσης, αντί του χωρίου E πρέπει να θεωρήσουμε το

$$E^* = \{(\rho,\theta,\phi) \,|\, 0 < \rho \le 1, 0 \le \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi\},$$

δηλαδή να αφαιρέσουμε από το E τέσσερις από τις έξι πλευρές του. Μόνο έτσι μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση $T : E^* \to D^*$ είναι ένα-προς-ένα και επί και να γράψουμε τον τύπο αλλαγής μεταβλητής στη μορφή

$$\iiint_{D^*} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dxdydz = \iiint_{E^*} e^{\rho^3} \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi. \qquad (35)$$

Όμως, αποδεικνύεται ότι, γενικά, το τριπλό ολοκλήρωμα μιας φραγμένης συνάρτησης σε κάποιο χωρίο δεν επηρεάζεται αν από το χωρίο αφαιρέσουμε κάποια μέρη του τα οποία έχουν *μηδενικό όγκο*. Επομένως, επειδή η διάμετρος μιας μπάλας είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και άρα έχει μηδενικό όγκο, έχουμε ότι τα τριπλά ολοκληρωματα στο D και στο D^* είναι ίσα. Επίσης, επειδή οι πλευρές ενός παραλληλεπιπέδου είναι επίπεδα σχήματα και άρα έχουν μηδενικό όγκο, έχουμε ότι τα τριπλά ολοκληρώματα στο E και στο E^* είναι ίσα και συμπεραίνουμε ότι από την σχέση (35) προκύπτει η σχέση (34). Έχοντας αυτήν την παρατήρηση στο μυαλό μας, από τώρα και στο εξής όταν κάνουμε αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες θα χρησιμοποιούμε (καταχρηστικά, αλλά ακίνδυνα) τα εκάστοτε χωρία D και E χωρίς να αφαιρούμε τον z-άξονα από το D και χωρίς να αφαιρούμε τις τιμές $\rho = 0$, $\theta = 2\pi$, $\phi = 0$ και $\phi = \pi$ από τις σφαιρικές συντεταγμένες. Έτσι η παρουσίαση θα γίνεται απλούστερη.

Δεύτερο παράδειγμα. Θεωρούμε το χωρίο D στον xyz-χώρο το οποίο ορίζεται από τις σχέσεις $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ και βρίσκεται ανάμεσα στις σφαίρες με κέντρο $(0, 0, 0)$ και ακτίνες 2 και 3. Δηλαδή

$$D = \{(x, y, z) \,|\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

Θα υπολογίσουμε το $\iiint_D xy\, dxdydz$. Οι σχέσεις $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ λένε ότι το D βρίσκεται στο ογδοημόριο του xyz-χώρου που βρίσκεται πάνω από το πρώτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου. Με τα σύμβολα που χρησιμοποιήσαμε στην συζήτηση πριν από την σχέση (33) μπορούμε να πούμε ότι το D βρίσκεται ανάμεσα στα ημιεπίπεδα L_0 και $L_{\pi/2}$ που αντιστοιχούν στις γωνίες $\theta_1 = 0$ και $\theta_2 = \pi/2$ και πάνω από την κωνική επιφάνεια $K_{\pi/2}$ που αντιστοιχεί στη γωνία $\phi = \pi/2$. Αυτή η κωνική επιφάνεια ταυτίζεται με το xy-επίπεδο. Αν συνυπολογίσουμε και τις δύο σφαίρες με κέντρο $(0, 0, 0)$ και ακτίνες 2 και 3, συμπεραίνουμε ότι το χωρίο D αντιστοιχεί μέσω της αλλαγής από σφαιρκές σε καρτεσιανές συντεταγμένες στο χωρίο

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, 2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$$

του $\rho\theta\phi$-χώρου. Άρα

$$\begin{aligned}\iiint_D xy\, dxdydz &= \iiint_E \rho^2 \cos\theta \sin\theta \sin^2\phi\, \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_2^3 \Big(\int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\pi/2} \rho^4 \cos\theta \sin\theta \sin^3\phi\, d\phi \Big) d\theta \Big) d\rho \\ &= \int_2^3 \rho^4\, d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta\, d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^3\phi\, d\phi = 211/15.\end{aligned}$$

Αν δυσκολευόμαστε με τα σχήματα, μπορούμε να δούμε “αλγεβρικά” τα διαστήματα των ρ, θ και ϕ από τις δοσμένες σχέσεις. Η σχέση $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ισοδυναμεί με $2 \leq \rho \leq 3$. Επίσης, οι σχέσεις $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ γράφονται ισοδύναμα $\rho \cos\theta \sin\phi \geq 0$, $\rho \sin\theta \sin\phi \geq 0$, $\rho \cos\phi \geq 0$. Επειδή $\rho \geq 0$ και $\sin\phi \geq 0$, οι σχέσεις αυτές ισοδυναμούν με τις $\sin\theta \geq 0$, $\cos\theta \geq 0$, $\cos\phi \geq 0$ και αυτές ισοδυναμούν με τις $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

Τρίτο παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, όπου

$$D = \{(x, y, z) \,|\, x \geq 0, y \geq 0, 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Οι $x \geq 0$, $y \geq 0$ γράφονται ισοδύναμα $\rho \cos\theta \sin\phi \geq 0$, $\rho \sin\theta \sin\phi \geq 0$. Επειδή $\rho \geq 0$ και $\sin\phi \geq 0$, οι σχέσεις αυτές ισοδυναμούν με τις $\sin\theta \geq 0$, $\cos\theta \geq 0$ και αυτές ισοδυναμούν με την $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Κατόπιν, η σχέση $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ ισοδυναμεί με την $2 \leq \rho \leq 4$. Τέλος, η σχέση $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ γράφεται ισοδύναμα $\rho \sin\phi \leq \rho \cos\phi \leq \sqrt{3}\rho \sin\phi$ και αυτή είναι ισοδύναμη με την $1/\sqrt{3} \leq \tan\phi \leq 1$ και αυτή είναι ισοδύναμη με την $\pi/6 \leq \phi \leq \pi/4$. Άρα το χωρίο D αντιστοιχεί στο χωρίο

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, 2 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \theta \leq \pi/2, \pi/6 \leq \phi \leq \pi/4\}$$

του $\rho\theta\phi$-χώρου. Άρα

$$\begin{aligned}\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz &= \iiint_E \rho\, \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_2^4 \Big(\int_0^{\pi/2} \Big(\int_{\pi/6}^{\pi/4} \rho^3 \sin\phi\, d\phi \Big) d\theta \Big) d\rho \\ &= \int_2^4 \rho^3\, d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin\phi\, d\phi = 15\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Το τρίτο σημαντικό παράδειγμα αλλαγής μεταβλητής είναι η **αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες**. Στον xyz-χώρο γράφουμε

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

Για το σημείο (x, y, z) το ζευγάρι (r, θ) είναι το ζευγάρι των *πολικών συντεταγμένων* του σημείου $(x, y, 0)$, το οποίο είναι η κατακόρυφη προβολή του (x, y, z) στο xy-επίπεδο. Το r διατρέχει το διάστημα $(0, +\infty)$, το θ διατρέχει το διάστημα $[0, 2\pi)$ και το z διατρέχει το διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Τυπικά, το r δεν παίρνει την τιμή 0 διότι αυτό θα σήμαινε ότι το θ δεν θα οριζόταν. Δηλαδή αποκλείουμε ολόκληρο τον z-άξονα.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$T : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \,|\, z \in \mathbb{R}\}$$

με τύπο

$$(x, y, z) = T(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα της συνάρτησης T είναι ίση με

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r.$$

Προφανώς, η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας είναι ίση με r.

Ας δούμε σε τί είδους χωρίο D στον xyz-χώρο απεικονίζει η T ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο E στον $r\theta z$-χώρο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες:

$$E = \{(r, \theta, z) \,|\, r_1 \le r \le r_2, \theta_1 \le \theta \le \theta_2, z_1 \le z \le z_2\}.$$

Τα σημεία (x, y, z) για τα οποία το αντίστοιχο r έχει μια συγκεκριμένη τιμή είναι τα σημεία του κατακόρυφου κυλίνδρου M_r με άξονα συμμετρίας τον z-άξονα και ακτίνα r. Άρα τα σημεία (x, y, z) για τα οποία το αντίστοιχο r παίρνει τιμές στο διάστημα $[r_1, r_2]$ είναι τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στους κυλίνδρους M_{r_1} και M_{r_2}. Ομοίως, τα σημεία (x, y, z) για τα οποία το αντίστοιχο θ έχει μια συγκεκριμένη τιμή είναι τα σημεία του ημιεπιπέδου L_θ το οποίο έχει ως ακμή του τον z-άξονα και περιέχει την ημιευθεία του xy-επιπέδου η οποία σχηματίσει γωνία θ με τον θετικό x-ημιάξονα. Άρα τα σημεία (x, y, z) για τα οποία το αντίστοιχο θ παίρνει τιμές στο διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ είναι τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στα ημιεπίπεδα L_{θ_1} και L_{θ_2}. Τέλος, τα σημεία (x, y, z) για τα οποία το αντίστοιχο z έχει μια συγκεκριμένη τιμή είναι τα σημεία του οριζόντιου επιπέδου P_z το οποίο τέμνει τον z-άξονα στο σημείο $(0, 0, z)$. Άρα τα σημεία (x, y, z) για τα οποία το αντίστοιχο z παίρνει τιμές στο διάστημα $[z_1, z_2]$ είναι τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στα επίπεδα P_{z_1} και P_{z_2}. Άρα η T απεικονίζει το E του $r\theta z$-χώρου στο χωρίο D του xyz-χώρου που βρίσκεται ανάμεσα στους κυλίνδρους M_{r_1}, M_{r_2}, στα ημιεπίπεδα L_{θ_1}, L_{θ_2} και στα επίπεδα P_{z_1}, P_{z_2}. Επομένως, για τα συγκεκριμένα χωρία D και E ο τύπος αλλαγής μεταβλητής (30) γράφεται

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz &= \iiint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, drd\theta dz \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \Big(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big(\int_{z_1}^{z_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, dz \Big) d\theta \Big) dr. \end{aligned} \tag{36}$$

Στον τύπο (36) η εμφανιζόμενη σχέση

$$dxdydz = r\, drd\theta dz$$

προκύπτει από τον υπολογισμό της Ιακωβιανής ορίζουσας της συνάρτησης T που μετατρέπει κυλινδρικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές συντεταγμένες και θα θυμόμαστε αυτήν την σχέση χωρίς να κάνουμε κάθε φορά τον υπολογισμό.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\iiint_D z\,dxdydz$, όπου

$$D = \{(x,y,z)\,|\,x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Το χωρίο D είναι ένας κατακόρυφος κύλινδρος με βάση στο xy-επίπεδο το πρώτο τεταρτημόριο του μοναδιαίου δίσκου με κέντρο $(0,0,0)$ και ύψος ίσο με 1.
Οι $x \geq 0$, $y \geq 0$ γράφονται ισοδύναμα $r\cos\theta \geq 0$, $r\sin\theta \geq 0$. Αυτές ισοδυναμούν με τις $\sin\theta \geq 0$, $\cos\theta \geq 0$ και αυτές ισοδυναμούν με την $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Η σχέση $x^2+y^2 \leq 1$ ισοδυναμεί με την $r \leq 1$. Τέλος, η σχέση $0 \leq z \leq 1$ ισοδυναμεί με τον εαυτό της!! Άρα το χωρίο D αντιστοιχεί στο χωρίο

$$E = \{(r,\theta,z)\,|\,0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 1\}$$

του $r\theta z$-χώρου. Άρα

$$\begin{aligned}\iiint_D z\,dxdydz &= \iiint_E z\,r\,drd\theta dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^1 zr\,dz\Big)d\theta\Big)dr \\ &= \int_0^1 r\,dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 z\,dz = \pi/6.\end{aligned} \tag{37}$$

Σημαντική παρατήρηση: (Παρόμοια με την ανάλογη παρατήρηση για τις σφαιρικές συντεταγμένες.) Όταν χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες πρέπει να παραλείπουμε ολόκληρο τον z-άξονα. Επίσης, οι τιμές $\rho = 0$ και $\theta = 2\pi$ δεν επιτρέπονται για τις κυλινδρικές συντεταγμένες. Άρα τα χωρία D και E στο παράδειγμά μας χρησιμοποιήθηκαν καταχρηστικά. Από τον κύλινδρο D πρέπει να αφαιρέσουμε την ακμή του η οποία βρίσκεται πάνω στον z-άξονα και να θεωρήσουμε το χωρίο

$$D^* = \{(x,y,z)\,|\,x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq 1\} \setminus \{(0,0,z)\,|\,0 \leq z \leq 1\}.$$

Επίσης, αντί του χωρίου E πρέπει να θεωρήσουμε το

$$E^* = \{(r,\theta,z)\,|\,0 < r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq z \leq 1\},$$

δηλαδή να αφαιρέσουμε από το E δύο από τις έξι πλευρές του. Τώρα μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση $T : E^* \to D^*$ είναι ένα-προς-ένα και επί και να γράψουμε τον τύπο αλλαγής μεταβλητής στη μορφή

$$\iiint_{D^*} z\,dxdydz = \iiint_{E^*} z\,r\,drd\theta dz. \tag{38}$$

Όμως, επειδή η ακμή ενός κυλίνδρου είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και άρα έχει μηδενικό όγκο, έχουμε ότι τα τριπλά ολοκληρωματα στο D και στο D^* είναι ίσα. Επίσης, επειδή οι πλευρές ενός παραλληλεπιπέδου είναι επίπεδα σχήματα και άρα έχουν μηδενικό όγκο, έχουμε ότι τα τριπλά ολοκληρώματα στο E και στο E^* είναι ίσα και συμπεραίνουμε ότι από την σχέση (38) προκύπτει η σχέση (37). Γενικότερα, λοιπόν, από τώρα και στο εξής όταν κάνουμε αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες θα χρησιμοποιούμε (καταχρηστικά, αλλά ακίνδυνα) τα εκάστοτε χωρία D και E χωρίς να αφαιρούμε τον z-άξονα από το D και χωρίς να αφαιρούμε τις τιμές $r = 0$, $\theta = 2\pi$ από τις κυλινδρικές συντεταγμένες.

5η εβδομάδα.

Τώρα θα επιχειρήσουμε να δώσουμε μια απόδειξη του τύπου αλλαγής μεταβλητής. Η απόδειξη δεν θα είναι ιδιαίτερα αυστηρή και θα περιοριστούμε στο να αναδείξουμε τις βασικές ιδέες που βρίσκονται στη βάση της. Επαναδιατυπώνουμε το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής στις δύο διαστάσεις:

Αν η απεικόνιση $T : E \to D$ είναι ένα-προς-ένα από το χωρίο E επί του χωρίου D και αν οι συναρτήσεις $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς u, v στο χωρίο E, τότε

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \Big| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big| dudv, \tag{39}$$

όπου $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα των x, y ως συναρτήσεις των u, v:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε ένα πλέγμα οριζόντιων και κατακόρυφων ευθειών στο uv-επίπεδο έτσι ώστε οι διαδοχικές οριζόντιες ευθείες να απέχουν ελάχιστη απόσταση η μία από την άλλη και, ομοίως, οι διαδοχικές κατακόρυφες ευθείες να απέχουν ελάχιστη απόσταση η μία από την άλλη. Αυτό το πλέγμα ευθειών χωρίζει το χωρίο E σε πολύ μικρά χωρία τα περισσότερα από τα οποία είναι πολύ μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα και κάποια έχουν άλλα σχήματα, αλλά αυτά τα τελευταία είναι ακριβώς εκείνα που ακουμπούν το σύνορο του E. Ας ονομάσουμε E' το χωρίο που σχηματίζεται από την ένωση των ολόκληρων ορθογώνιων παραλληλογράμμων μέσα στο E. Τότε το E' περιέχεται στο E, ενώ η διαφορά $E \setminus E'$ είναι η ένωση των υπόλοιπων σχημάτων. Δοκιμάζοντας διάφορες περιπτώσεις, βλέπουμε ότι όσο λεπτότερο είναι το πλέγμα των παράλληλων ευθειών τόσο μεγαλύτερο μέρος του E καταλαμβάνει το E', δηλαδή το εμβαδόν του E' τείνει να εξισωθεί με το εμβαδόν του E και το εμβαδόν του $E \setminus E'$ τείνει στο 0. Άρα αν θεωρήσουμε τυχόν $\epsilon > 0$ μπορούμε να πάρουμε τις διαδοχικές οριζόντιες ευθείες και τις διαδοχικές κατακόρυφες ευθείες τόσο κοντά την μία με την άλλη έτσι ώστε να είναι

$$A(E \setminus E') \leq \epsilon. \tag{40}$$

Τώρα, η απεικόνιση $T : E \to D$ απεικονίζει τις τομές των οριζόντιων ευθειών με το χωρίο E σε κάποιες καμπύλες μέσα στο χωρίο D οι οποίες είναι περίπου παράλληλες και τις τομές των κατακόρυφων ευθειών με το E σε κάποιες άλλες καμπύλες μέσα στο D οι οποίες είναι κι αυτές περίπου παράλληλες. Έτσι σχηματίζεται ένα αντίστοιχο πλέγμα καμπυλών μέσα στο D που χωρίζουν το D σε πολύ μικρά χωρία. Καθένα από αυτά τα πολύ μικρά χωρία στο D είναι εικόνα μέσω της απεικόνισης T ενός αντίστοιχου πολύ μικρού χωρίου στο E. Από τα ολόκληρα ορθογώνια παραλληλόγραμμα στο E (εκείνα που σχηματίζουν το E') προκύπτουν μέσω της T κάποια ολόκληρα χωρία στο D που μοιάζουν με ορθογώνια παραλληλόγραμμα μόνο που οι πλευρές τους είναι καμπύλες και όχι αναγκαστικά ευθείες: ας ονομάσουμε D' την ένωσή τους. Όσο πιο λεπτό είναι το αρχικό πλέγμα ευθειών στο χωρίο E τόσο πιο λεπτό είναι το αντίστοιχο πλέγμα καμπυλών στο χωρίο D και επομένως τόσο μεγαλύτερο μέρος του D καταλαμβάνει το D', δηλαδή το εμβαδόν του D' τείνει να εξισωθεί με το εμβαδόν του D και το εμβαδόν του $D \setminus D'$ τείνει στο 0. Άρα, όπως πριν, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$A(D \setminus D') \leq \epsilon. \tag{41}$$

Ας ονομάσουμε e το τυχαίο μικρό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από αυτά που σχηματίζουν το χωρίο E' και ας ονομάσουμε d το αντίστοιχο μικρό *περίπου* ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από αυτά που σχηματίζουν το χωρίο D'. Το d είναι η εικόνα του e μέσω της απεικόνισης T: $d = T(e)$. Ή ένωση των e είναι το E' και η ένωση των αντίστοιχων d είναι το D'.

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε ότι η $f : D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο D και άρα και η $f \circ T : E \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο E. Επομένως, αν M είναι ένα άνω φράγμα της $|f|$ στο D, από την (41) έχουμε ότι

$$\iint_{D \setminus D'} |f(x,y)|\, dxdy \leq M\, A(D \setminus D') \leq M\epsilon.$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\Big| \iint_D f(x,y)\, dxdy - \iint_{D'} f(x,y)\, dxdy \Big| &= \Big| \iint_{D \setminus D'} f(x,y)\, dxdy \Big| \\ &\leq \iint_{D \setminus D'} |f(x,y)|\, dxdy \leq M\epsilon.\end{aligned} \tag{42}$$

Επειδή το D' είναι η ένωση των d, έχουμε ότι

$$\iint_{D'} f(x,y)\, dxdy = \sum_d \iint_d f(x,y)\, dxdy. \tag{43}$$

Τώρα θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο (x_d, y_d) του μικρού χωρίου d. Επειδή η f είναι συνεχής και επειδή τα διάφορα χωρία d είναι πολύ μικρά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $(x,y) \in d$ ισχύει $|f(x,y) - f(x_d, y_d)| \leq \epsilon$. Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\Big| \iint_d f(x,y)\, dxdy - f(x_d,y_d)A(d) \Big| &= \Big| \iint_d f(x,y)\, dxdy - \iint_d f(x_d,y_d)\, dxdy \Big| \\ &= \Big| \iint_d (f(x,y) - f(x_d,y_d))\, dxdy \Big| \leq \iint_d |f(x,y) - f(x_d,y_d)|\, dxdy \leq \epsilon A(d).\end{aligned}$$

Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες για κάθε d, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\Big| \sum_d \iint_d f(x,y)\, dxdy - \sum_d f(x_d,y_d)A(d) \Big| &= \Big| \sum_d \Big(\iint_d f(x,y)\, dxdy - f(x_d,y_d)A(d) \Big) \Big| \\ &\leq \sum_d \Big| \iint_d f(x,y)\, dxdy - f(x_d,y_d)A(d) \Big| \\ &\leq \sum_d \epsilon A(d) = \epsilon \sum_d A(d) = \epsilon A(D') \leq \epsilon A(D).\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με την (43), έχουμε ότι

$$\Big| \iint_{D'} f(x,y)\, dxdy - \sum_d f(x_d,y_d)A(d) \Big| \leq \epsilon A(D)$$

και από την (42) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\Big| \iint_D f(x,y)\, dxdy - \sum_d f(x_d,y_d)A(d) \Big| &\leq \Big| \iint_D f(x,y)\, dxdy - \iint_{D'} f(x,y)\, dxdy \Big| \\ &+ \Big| \iint_{D'} f(x,y)\, dxdy - \sum_d f(x_d,y_d)A(d) \Big| \leq \epsilon M + \epsilon A(D) = \epsilon(M + A(D)).\end{aligned} \tag{44}$$

Τώρα θεωρούμε το μικρό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο e που αντιστοιχεί στο μικρό χωρίο d. Αν (u_e, v_e) είναι η κάτω αριστερή κορυφή του e, τότε οι άλλες τρεις κορυφές του είναι τα σημεία $(u_e + \Delta u, v_e)$, $(u_e, v_e + \Delta v)$ και $(u_e + \Delta u, v_e + \Delta v)$, όπου οι αριθμοί $\Delta u, \Delta v$ είναι πολύ μικροί (οι αποστάσεις των διαδοχικών κατακόρυφων και οριζόντιων ευθειών που ορίζουν το πλέγμα στο uv-επίπεδο). Επομένως,

$$A(e) = \Delta u \Delta v. \tag{45}$$

Το αντίστοιχο μικρό χωρίο d είναι *περίπου* παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία

$$\begin{aligned}
&T(u_e, v_e) = (x(u_e, v_e), y(u_e, v_e))\\
&T(u_e + \Delta u, v_e) = (x(u_e + \Delta u, v_e), y(u_e + \Delta u, v_e))\\
&T(u_e, v_e + \Delta v) = (x(u_e, v_e + \Delta v), y(u_e, v_e + \Delta v))\\
&T(u_e + \Delta u, v_e + \Delta v) = (x(u_e + \Delta u, v_e + \Delta v), y(u_e + \Delta u, v_e + \Delta v)).
\end{aligned}$$

Τώρα θεωρούμε το παραλληλόγραμμο d' το οποίο έχει ως τρεις διαδοχικές από τις κορυφές του τα τρία πρώτα από τα παραπάνω σημεία. Τότε το *περίπου* παραλληλόγραμμο d είναι σχεδόν ίσο με το d' και μπορούμε να υποθέσουμε ότι το εμβαδόν του d είναι περίπου ίσο με το εμβαδόν του d'. Δηλαδή ότι η διαφορά ανάμεσα στα δύο εμβαδά είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με το εμβαδόν καθενός από τα d, d' ξεχωριστά:

$$|A(d) - A(d')| \leq \epsilon A(d).$$

Από αυτήν την σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_d f(x_d, y_d)A(d) - \sum_d f(x_d, y_d)A(d')\Big| &= \Big|\sum_d f(x_d, y_d)(A(d) - A(d'))\Big|\\
&\leq \sum_d |f(x_d, y_d)||A(d) - A(d')| \leq \sum_d M\epsilon A(d) = M\epsilon \sum_d A(d)\\
&= M\epsilon A(D') \leq M\epsilon A(D).
\end{aligned}$$

Άρα η σχέση (44) γίνεται

$$\begin{aligned}
\Big|\iint_D f(x,y)\,dxdy - \sum_d f(x_d, y_d)A(d')\Big| &\leq \Big|\iint_D f(x,y)\,dxdy - \sum_d f(x_d, y_d)A(d)\Big|\\
&+ \Big|\sum_d f(x_d, y_d)A(d) - \sum_d f(x_d, y_d)A(d')\Big|\\
&\leq \epsilon(M + A(D)) + M\epsilon A(D) = \epsilon(M + A(D) + MA(D))
\end{aligned} \tag{46}$$

Ο τύπος που δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου d' είναι ο εξής:

$$A(d') = \left|\det\begin{bmatrix} x(u_e + \Delta u, v_e) - x(u_e, v_e) & x(u_e, v_e + \Delta v) - x(u_e, v_e)\\ y(u_e + \Delta u, v_e) - y(u_e, v_e) & y(u_e, v_e + \Delta v) - y(u_e, v_e)\end{bmatrix}\right| \tag{47}$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής για την παράγωγο της συνάρτησης $x(u, v)$ ως προς u (με σταθερό v) έχουμε ότι

$$x(u_e + \Delta u, v_e) - x(u_e, v_e) = \frac{\partial x}{\partial u}(u', v_e)\Delta u$$

για κάποιο u' ανάμεσα στα u_e και $u_e + \Delta u$. Επειδή η $\frac{\partial x}{\partial u}$ είναι συνεχής συνάρτηση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|\frac{\partial x}{\partial u}(u', v_e) - \frac{\partial x}{\partial u}(u_e, v_e)| \leq \epsilon$ και άρα

$$\left|x(u_e + \Delta u, v_e) - x(u_e, v_e) - \frac{\partial x}{\partial u}(u_e, v_e)\Delta u\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}(u', v_e)\Delta u - \frac{\partial x}{\partial u}(u_e, v_e)\Delta u\right| \leq \epsilon\Delta u.$$

Ομοίως αποδεικνύονται οι ανάλογες σχέσεις

$$\Big|x(u_e, v_e+\Delta v)-x(u_e,v_e)-\frac{\partial x}{\partial v}(u_e,v_e)\Delta v\Big|\le \epsilon\Delta v,$$

$$\Big|y(u_e+\Delta u, v_e)-y(u_e,v_e)-\frac{\partial y}{\partial u}(u_e,v_e)\Delta u\Big|\le \epsilon\Delta u,$$

$$\Big|y(u_e, v_e+\Delta v)-y(u_e,v_e)-\frac{\partial y}{\partial v}(u_e,v_e)\Delta v\Big|\le \epsilon\Delta v.$$

Παίρνοντας ως K ένα άνω φράγμα των $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ στο χωρίο E, χρησιμοποιώντας τις τελευταίες τέσσερις σχέσεις και κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις με τις ορίζουσες και με τις τριγωνικές ανισότητες και υποθέτοντας ότι $\epsilon\le K$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned}\Bigg|\det&\begin{bmatrix} x(u_e+\Delta u,v_e)-x(u_e,v_e) & x(u_e,v+\Delta v)-x(u_e,v_e)\\ y(u_e+\Delta u,v_e)-y(u_e,v_e) & y(u_e,v_e+\Delta v)-y(u_e,v_e)\end{bmatrix}\\ &-\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u_e,v_e)\Delta u & \frac{\partial x}{\partial v}(u_e,v_e)\Delta v\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_e,v_e)\Delta u & \frac{\partial y}{\partial v}(u_e,v_e)\Delta v\end{bmatrix}\Bigg|\le 6K\epsilon\Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

Από αυτήν την σχέση και την (47) συνεπάγεται

$$\left|A(d')-\left|\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u_e,v_e)\Delta u & \frac{\partial x}{\partial v}(u_e,v_e)\Delta v\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_e,v_e)\Delta u & \frac{\partial y}{\partial v}(u_e,v_e)\Delta v\end{bmatrix}\right|\right|\le 6K\epsilon\Delta u\Delta v.$$

Επειδή $\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u_e,v_e)\Delta u & \frac{\partial x}{\partial v}(u_e,v_e)\Delta v\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_e,v_e)\Delta u & \frac{\partial y}{\partial v}(u_e,v_e)\Delta v\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u_e,v_e) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_e,v_e)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_e,v_e) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_e,v_e)\end{bmatrix}\Delta u\Delta v$ και λόγω της (45), συνεπάγεται

$$\left|A(d')-\left|\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u_e,v_e) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_e,v_e)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_e,v_e) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_e,v_e)\end{bmatrix}\right|A(e)\right|\le 6K\epsilon A(e). \tag{48}$$

Για απλούστευση των συμβόλων γράφουμε προσωρινά

$$J(u,v):=\left|\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{bmatrix}\right|$$

και τότε η (48) γράφεται

$$|A(d')-J(u_e,v_e)A(e)|\le 6K\epsilon A(e).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\Big|\sum_d f(x_d,y_d)A(d')-\sum_d f(x_d,y_d)J(u_e,v_e)A(e)\Big| &= \Big|\sum_d f(x_d,y_d)(A(d')-J(u_e,v_e)A(e))\Big|\\ &\le \sum_d |f(x_d,y_d)||A(d')-J(u_e,v_e)A(e)|\le 6KM\epsilon\sum_d A(e)\\ &=6KM\epsilon\sum_e A(e)=6KM\epsilon A(E')\le 6KM\epsilon A(E),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση $|f(x_d,y_d)|\le M$ (αφού το M είναι άνω φράγμα της $|f|$ στο D) καθώς και ότι το άθροισμα $\sum_d$ μπορούμε να το γράψουμε ως άθροισμα $\sum_e$, αφού σε κάθε d αντιστοιχεί ακριβώς ένα e.

Από την τελευταία σχέση και από την (46) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\Big|\iint_D f(x,y)\,dxdy-\sum_d f(x_d,y_d)J(u_e,v_e)A(e)\Big| &\le \Big|\iint_D f(x,y)\,dxdy-\sum_d f(x_d,y_d)A(d')\Big|\\ &+\Big|\sum_d f(x_d,y_d)A(d')-\sum_d f(x_d,y_d)J(u_e,v_e)A(e)\Big|\\ &\le \epsilon(M+A(D)+MA(D))+6KM\epsilon A(E)\\ &=\epsilon(M+A(D)+MA(D)+6KMA(E)).\end{aligned}$$

Είχαμε πει ότι το (x_d, y_d) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του μικρού χωρίου d. Τώρα θα συγκεκριμενοποιήσουμε την επιλογή του (x_d, y_d):

$$(x_d, y_d) = T(u_e, v_e) = (x(u_e, v_e), y(u_e, v_e)),$$

όπου, όπως έχουμε πει, το (u_e, v_e) είναι η κάτω αριστερή κορυφή του μικρού ορθογωνίου παραλληλογράμμου e. Άρα η τελευταία σχέση γράφεται

$$\Big|\iint_D f(x,y)\,dxdy - \sum_e f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)A(e)\Big| \le \epsilon(M + A(D) + MA(D) + 6KMA(E)), \quad (49)$$

όπου και πάλι γράφουμε $\sum_e$ αντί του $\sum_d$.
Θυμόμαστε ότι το K είναι άνω φράγμα των $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ στο χωρίο E και, βάσει αυτού, εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$|J(u,v)| = \Big|\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Big| \le 2K^2$$

για κάθε $(u,v) \in E$. Επομένως, από την (40) έχουμε ότι

$$\iint_{E\setminus E'} |f(T(u,v))J(u,v)|\,dudv \le 2MK^2\,A(E \setminus E') \le 2MK^2\epsilon.$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\Big|\iint_E f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - \iint_{E'} f(T(u,v))J(u,v)\,dudv\Big| \\ = \Big|\iint_{E\setminus E'} f(T(u,v))J(u,v)\,dudv\Big| \\ \le \iint_{E\setminus E'} |f(T(u,v))J(u,v)|\,dudv \le 2MK^2\epsilon.\end{aligned} \quad (50)$$

Επειδή το E' είναι η ένωση των e, έχουμε ότι

$$\iint_{E'} f(T(u,v))J(u,v)\,dudv = \sum_e \iint_e f(T(u,v))J(u,v)\,dudv. \quad (51)$$

Επειδή οι $f \circ T$ και J είναι συνεχείς στο E και επειδή τα χωρία e είναι πολύ μικρά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $(u,v) \in e$ ισχύει $|f(T(u,v))J(u,v) - f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)| \le \epsilon$ και τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}&\Big|\iint_e f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)A(e)\Big| \\ &= \Big|\iint_e f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - \iint_e f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)\,dudv\Big| \\ &= \Big|\iint_e (f(T(u,v))J(u,v) - f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e))\,dudv\Big| \\ &\le \iint_e |f(T(u,v))J(u,v) - f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)|\,dxdy \le \epsilon A(e).\end{aligned}$$

Προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες για κάθε e, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_e \iint_e f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - \sum_e f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)A(e)\Big| \\ &= \Big|\sum_e \Big(\iint_e f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)A(e)\Big)\Big| \\ &\le \sum_e \Big|\iint_e f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)A(e)\Big| \\ &\le \sum_e \epsilon A(e) = \epsilon \sum_e A(e) = \epsilon A(E') \le \epsilon A(E).\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με την (51), βρίσκουμε ότι

$$\Big| \iint_{E'} f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - \sum_e f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)A(e)\Big| \le \epsilon A(E).$$

Μαζί και με την (50) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
&\Big| \iint_{E} f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - \sum_e f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)A(e)\Big| \\
&\qquad \le \Big| \iint_{E} f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - \iint_{E'} f(T(u,v))J(u,v)\,dudv\Big| \\
&\qquad\quad + \Big| \iint_{E'} f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - \sum_e f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)A(e)\Big| \\
&\qquad \le 2MK^2\epsilon + \epsilon A(E) = \epsilon(2MK^2 + A(E)).
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση μαζί με την (49) δίνουν

$$\begin{aligned}
&\Big| \iint_{D} f(x,y)\,dxdy - \iint_{E} f(T(u,v))J(u,v)\,dudv\Big| \\
&\qquad \le \Big| \iint_{D} f(x,y)\,dxdy - \sum_e f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)A(e)\Big| \\
&\qquad\quad + \Big| \iint_{E} f(T(u,v))J(u,v)\,dudv - \sum_e f(T(u_e,v_e))J(u_e,v_e)A(e)\Big| \\
&\qquad \le \epsilon(M + A(D) + MA(D) + 6KMA(E)) + \epsilon(2MK^2 + A(E)) \\
&\qquad = \epsilon(M + A(D) + MA(D) + 6MKA(E) + 2MK^2 + A(E)) = Q\epsilon,
\end{aligned}$$

όπου Q είναι ο σταθερός αριθμός $M + A(D) + MA(D) + 6MKA(E) + 2MK^2 + A(E)$. Αν στην τελευταία σχέση θεωρήσουμε ότι $\epsilon \to 0+$, καταλήγουμε στην ισότητα

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(T(u,v))J(u,v)\,dudv$$

και αυτός είναι ακριβώς ο τύπος αλλαγής μεταβλητής αν θυμηθούμε πώς ορίστηκε το $J(u,v)$.

Η απόδειξη του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητής στις τρεις διαστάσεις είναι παρόμοια: η βασική ιδέα είναι να χωρίσουμε το E σε πολύ μικρά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Συμπληρώστε εσείς (*αν* ενδιαφέρεστε), βήμα-βήμα, τις λεπτομέρειες.

Το επόμενο θέμα μας είναι τα λεγόμενα **καταχρηστικά** ή **γενικευμένα ολοκληρώματα**. Πρόκειται για ολοκληρώματα σε χωρία D τα οποία δεν είναι φραγμένα ή για ολοκληρώματα στα οποία η προς ολοκλήρωση συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο χωρίο ολοκλήρωσης. Η ιδέα είναι ίδια με τα γενικευμένα ολοκληρώματα μίας μεταβλητής. Για παράδειγμα, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ αποτελεί γενικευμένο ολοκλήρωμα διότι το χωρίο ολοκλήρωσης είναι η μη-φραγμένη ημιευθεία $[a,+\infty)$. Επίσης, αν η f απειρίζεται στο b, τότε το $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι κι αυτό γενικευμένο ολοκλήρωμα. Γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό μίας μεταβλητής ότι, στην πρώτη περίπτωση, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ισούται με το όριο του $\int_a^R f(x)\,dx$ όταν $R \to +\infty$ και ότι, στην δεύτερη περίπτωση, το $\int_a^b f(x)\,dx$ ισούται με το όριο του $\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ όταν $\delta \to 0+$. Δηλαδή, και στις δύο περιπτώσεις μικραίνουμε το χωρίο ολοκλήρωσης, ώστε είτε να το κάνουμε φραγμένο είτε να αποφύγουμε το σημείο στο οποίο απειρίζεται η συνάρτηση, και μετά παίρνουμε το όριο καθώς το μικρότερο χωρίο τείνει να γίνει το αρχικό χωρίο ολοκλήρωσης. Στις διαστάσεις δύο και τρία θα περιοριστούμε στην περιγραφή της κατάστασης μέσω κάποιων παραδειγμάτων, χωρίς να επιδιώξουμε πλήρη θεωρητική ανάλυση.

Θεωρούμε $a > 0$ και το

$$\iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dxdy,$$

όπου $D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ είναι ο μοναδιαίος δίσκος με κέντρο το $(0,0)$. Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο διότι η συνάρτηση απειρίζεται στο σημείο $(0,0)$ του D. Οπότε θα αφαιρέσουμε από το D έναν μικρό δίσκο D_δ με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $\delta > 0$, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο χωρίο $D \setminus D_\delta$ και, τέλος, θα πάρουμε το όριο όταν $\delta \to 0+$. Δηλαδή,

$$\iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dxdy = \lim_{\delta\to 0+} \iint_{D\setminus D_\delta} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dxdy.$$

Το $D \setminus D_\delta$ περιγράφεται με πολικές συντεταγμένες ως εξής: $\delta \leq r \leq 1$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Άρα

$$\begin{aligned}\iint_{D\setminus D_\delta} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dxdy &= \int_\delta^1 \Big(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^a}\, r\, d\theta\Big) dr = 2\pi \int_\delta^1 r^{1-a}\,dr \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{2-a}\,(1-\delta^{2-a}), & 1-a \neq -1 \\ 2\pi \log \frac{1}{\delta}, & 1-a = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

Επομένως, παίρνοντας όριο καθώς $\delta \to 0+$, βρίσκουμε ότι

$$\iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dxdy = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-a}, & 0 < a < 2 \\ +\infty, & a \geq 2 \end{cases}$$

Αν $0 < a < 2$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα *συγκλίνει* και ότι η τιμή του είναι (ο αριθμός) $\frac{2\pi}{2-a}$. Αν $a \geq 2$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα *αποκλίνει* και ότι η τιμή του είναι $+\infty$.

Θεωρούμε $a > 0$ και, ως δεύτερο παράδειγμα, το

$$\iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dxdy,$$

όπου $D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \geq 1\}$ είναι το εξωτερικό του μοναδιαίου δίσκου με κέντρο το $(0,0)$. Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο διότι το χωρίο D δεν είναι φραγμένο. Οπότε θα μικρύνουμε το D ώστε να γίνει φραγμένο, περιορίζοντάς το μέσα σε έναν μεγάλο δίσκο D_R με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $R > 1$, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο χωρίο $D_R \cap D$ και, τέλος, θα πάρουμε το όριο όταν $R \to +\infty$. Δηλαδή,

$$\iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dxdy = \lim_{R\to +\infty} \iint_{D_R\cap D} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dxdy.$$

Το $D_R \cap D$ περιγράφεται με πολικές συντεταγμένες ως εξής: $1 \leq r \leq R$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Άρα

$$\begin{aligned}\iint_{D_R\cap D} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dxdy &= \int_1^R \Big(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^a}\, r\, d\theta\Big) dr = 2\pi \int_1^R r^{1-a}\,dr \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{2-a}\,(R^{2-a}-1), & 1-a \neq -1 \\ 2\pi \log R, & 1-a = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο καθώς $R \to +\infty$, βρίσκουμε ότι

$$\iint_D \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dxdy = \begin{cases} \frac{2\pi}{a-2}, & a > 2 \\ +\infty, & 0 < a \leq 2 \end{cases}$$

Αν $a > 2$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα *συγκλίνει* και ότι η τιμή του είναι (ο αριθμός) $\frac{2\pi}{a-2}$. Αν $0 < a \leq 2$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα *αποκλίνει* και ότι η τιμή του είναι $+\infty$.

Τώρα θεωρούμε $a > 0$ και το
$$\iint_D \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy,$$
όπου D είναι το τρίγωνο που περιγράφεται από τις σχέσεις $0 \le y \le x \le 1$. Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο διότι η συνάρτηση απειρίζεται στα σημεία μιας πλευράς του D, δηλαδή στα σημεία που ικανοποιούν την $y = x$. Θα μικρύνουμε το D ώστε να αποφύγουμε τα σημεία της πλευράς του στην κύρια διαγώνιο: θα πάρουμε την παράλληλη ευθεία στην κύρια διαγώνιο με εξίσωση $y = x - \delta$ με μικρό $\delta > 0$, ορίζοντας έτσι το μικρότερο τρίγωνο D_δ που περιγράφεται από τις σχέσεις $\delta \le x \le 1$ και $0 \le y \le x - \delta$. Κατόπιν θα βρούμε το ολοκλήρωμα στο D_δ και θα πάρουμε όριο όταν $\delta \to 0+$. Δηλαδή
$$\iint_D \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy = \lim_{\delta\to 0+} \iint_{D_\delta} \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy.$$
Έχουμε
$$\iint_{D_\delta} \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy = \int_\delta^1 \Big(\int_0^{x-\delta} \frac{1}{(x-y)^a}\,dy\Big)dx = \int_\delta^1 \Big(\int_\delta^x t^{-a}\,dt\Big)dx.$$
Αν $a = 1$, τότε
$$\int_\delta^x t^{-a}\,dt = \log\frac{x}{\delta}$$
και άρα
$$\iint_{D_\delta} \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy = \int_\delta^1 \log\frac{x}{\delta}\,dx = \delta\int_1^{1/\delta} \log t\,dt = \log(1/\delta) - 1 + \delta.$$
Παίρνοντας όριο καθώς $\delta \to 0+$, βρίσκουμε
$$\iint_D \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy = +\infty, \qquad \text{όταν } a = 1.$$
Αν $a \ne 1$, τότε
$$\int_\delta^x t^{-a}\,dt = \frac{1}{1-a}(x^{1-a} - \delta^{1-a})$$
και άρα
$$\iint_{D_\delta} \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy = \frac{1}{1-a}\int_\delta^1 (x^{1-a} - \delta^{1-a})\,dx.$$
Αν $a = 2$, τότε
$$\iint_{D_\delta} \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy = -\log(1/\delta) + (1/\delta)(1-\delta) = -\log(1/\delta) + (1/\delta) - 1,$$
οπότε παίρνοντας όριο καθώς $\delta \to 0+$, βρίσκουμε
$$\iint_D \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy = +\infty, \qquad \text{όταν } a = 2.$$
Αν $a \ne 1$ και $a \ne 2$, τότε
$$\iint_{D_\delta} \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy = \frac{1}{1-a}\Big(\frac{1}{2-a}(1-\delta^{2-a}) - \delta^{1-a}(1-\delta)\Big).$$
Παίρνοντας όριο όταν $\delta \to 0+$, έχουμε τις εξής περιπτώσεις: το όριο είναι ίσο με $\frac{1}{(1-a)(2-a)}$ όταν $0 < a < 1$ και ίσο με $+\infty$ όταν $1 < a < 2$ και όταν $2 < a$. Άρα, συνολικά:
$$\iint_D \frac{1}{(x-y)^a}\,dxdy = \begin{cases} \frac{1}{(1-a)(2-a)}, & 0 < a < 1 \\ +\infty, & a \ge 1 \end{cases}$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει και η τιμή του είναι $\frac{1}{(1-a)(2-a)}$ όταν $0 < a < 1$. Αν $a \geq 1$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει και η τιμή του είναι $+\infty$.

Το τελευταίο παράδειγμα είναι το

$$\iiint_D \frac{1}{(1-x^2-y^2-z^2)^a}\,dxdydz,$$

όπου $a > 0$ και D είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0,0,0)$. Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο διότι η συνάρτηση απειρίζεται σε κάθε σημείο του συνόρου της μπάλας D, δηλαδή στην μοναδιαία σφαίρα με εξίσωση $x^2+y^2+z^2=1$. Θα θεωρήσουμε μια λίγο μικρότερη μπάλα D_R με κέντρο το $(0,0,0)$ και ακτίνα $R < 1$ και μετά θα πάρουμε όριο όταν $R \to 1-$. Δηλαδή,

$$\iiint_D \frac{1}{(1-x^2-y^2-z^2)^a}\,dxdydz = \lim_{R\to 1-}\iiint_{D_R} \frac{1}{(1-x^2-y^2-z^2)^a}\,dxdydz.$$

Με σφαιρικές συντεταγμένες βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\iiint_{D_R} \frac{1}{(1-x^2-y^2-z^2)^a}\,dxdydz &= \int_0^R\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^\pi \frac{\rho^2\sin\phi}{(1-\rho^2)^a}\,d\phi\Big)d\theta\Big)d\rho\\ &= \int_0^R \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^a}\,d\rho\int_0^\pi \sin\phi\,d\phi\int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi\int_0^R \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^a}\,d\rho.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\iiint_D \frac{1}{(1-x^2-y^2-z^2)^a}\,dxdydz = 4\pi\lim_{R\to 1-}\int_0^R \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^a}\,d\rho = 4\pi\int_0^1 \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^a}\,d\rho, \tag{52}$$

όπου το $\int_0^1 \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^a}\,d\rho$ είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα μίας μεταβλητής. Η συνάρτηση $f(\rho) = \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^a}$ απειρίζεται στο σημείο $\rho = 1$ και επειδή είναι λίγο δύσκολο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο διάστημα $[1,R]$ (και μετά να βρούμε το όριο όταν $R \to 1-$), γράφουμε την συνάρτηση στην μορφή

$$f(\rho) = \frac{\rho^2}{(1+\rho)^a}\,\frac{1}{(1-\rho)^a} = \frac{\rho^2}{(1+\rho)^a}\,g(\rho),$$

όπου η $g(\rho) = \frac{1}{(1-\rho)^a}$ είναι απλούστερη συνάρτηση και παρατηρούμε ότι το όριο

$$\lim_{\rho\to 1-}\frac{f(\rho)}{g(\rho)} = \lim_{\rho\to 1-}\frac{\rho^2}{(1+\rho)^a} = \frac{1}{2^a}$$

είναι μη-μηδενικός αριθμός. Αυτό συνεπάγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(\rho)\,d\rho$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 g(\rho)\,d\rho$ συγκλίνει. Το δεύτερο γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι πιο εύκολο να το χειριστούμε:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-\rho)^a}\,d\rho = \lim_{R\to 1-}\int_0^R \frac{1}{(1-\rho)^a}\,d\rho = \lim_{R\to 1-}\int_{1-R}^1 \frac{1}{t^a}\,dt = \begin{cases}\frac{1}{1-a}, & 0 < a < 1\\ +\infty, & a \geq 1\end{cases}$$

Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 g(\rho)\,d\rho$ συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < a < 1$. Συνεπάγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(\rho)\,d\rho$ συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < a < 1$ και καταλήγουμε στο ότι το αρχικό γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < a < 1$.

Σχόλιο: Αν $a \geq 1$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(\rho)\,d\rho$ αποκλίνει και η τιμή του είναι $+\infty$ (επειδή η f είναι μη-αρνητική). Επομένως, βάσει της (52), και το αρχικό γενικευμένο ολοκλήρωμα έχει τιμή $+\infty$. Τώρα, αν $0 < a < 1$, όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα που συναντήσαμε συγκλίνουν, αλλά έχουμε βρει την τιμή μόνο του $\int_0^1 g(\rho)\,d\rho = \frac{1}{1-a}$. Η τιμή του $\int_0^1 f(\rho)\,d\rho$ είναι, επίσης, αριθμός, αλλά δεν μπορούμε να την βρούμε και άρα ούτε την τιμή του αρχικού γενικευμένου ολοκληρώματος μπορούμε να βρούμε. Γνωρίζουμε μόνο ότι οι δύο τιμές είναι αριθμοί και ότι συνδέονται με την σχέση (52).

6η εβδομάδα.

Θυμηθήκαμε κάποια πράγματα για καμπύλες από τον Απειροστικό Λογισμό ΙΙ, προσαρμοσμένα στην περίπτωση των διαστάσεων 2 και 3. Καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ είναι μία συνάρτηση

$$\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathbb{R}^3$$

όπου I είναι οποιοδήποτε διάστημα (όχι μονοσύνολο) του $\mathbb{R}$. Η μόνη προϋπόθεση για να λέμε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma}$ είναι καμπύλη είναι η συνέχειά της στο διάστημα I. Τονίζουμε ότι *το I είναι διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων*. Κατά τα άλλα, το I μπορεί να είναι διάστημα οποιουδήποτε τύπου: ανοικτό, κλειστό, ημιανοικτό, φραγμένο, μη-φραγμένο. Αν $I = [a, b]$, τότε τα σημεία $\boldsymbol{\sigma}(a)$, $\boldsymbol{\sigma}(b)$ είναι τα άκρα της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$. Αν $I = (a, b)$, τότε λέμε ότι η καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ δεν έχει άκρα. Αν το I περιέχει μόνο το ένα άκρο του, το a ή το b, τότε λέμε ότι η καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ έχει μόνο ένα άκρο, το $\boldsymbol{\sigma}(a)$ ή το $\boldsymbol{\sigma}(b)$. Αν η καμπύλη έχει και τα δύο άκρα της και αυτά ταυτίζονται, δηλαδή αν $\boldsymbol{\sigma}(a) = \boldsymbol{\sigma}(b)$, τότε λέμε ότι η καμπύλη είναι κλειστή. Συνήθως η ανεξάρτητη μεταβλητή της καμπύλης στο διάστημα I συμβολίζεται t. Έτσι θέλουμε να δηλώσουμε ότι όταν ο *χρόνος* t διατρέχει ένα *χρονικό* διάστημα I, το αντίστοιχο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ *κινείται* στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$. Το σύνολο των θέσεων του κινητού σημείου $\boldsymbol{\sigma}(t)$, δηλαδή το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\boldsymbol{\sigma}$, είναι η τροχιά της καμπύλης. Καθώς η παράμετρος (χρόνος) t αυξάνεται στο διάστημα I το μεταβλητό σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ κινείται πάνω στην τροχιά της καμπύλης σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση η οποία ονομάζεται φορά ή κατεύθυνση της καμπύλης ή και φορά διαγραφής της τροχιάς της καμπύλης. Γράφουμε

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t)) \text{ ή } (x(t), y(t), z(t))$$

για να δηλώσουμε τις συντεταγμένες συναρτήσεις της $\boldsymbol{\sigma}$, οι οποίες είναι πραγματικές και συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα I.

Τρία απλά παραδείγματα. Αν μας δώσουν ένα οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ με συγκεκριμένα άκρα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, τότε μπορούμε να βρούμε μία καμπύλη η τροχιά της οποίας είναι το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα:

$$\boldsymbol{\sigma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{\sigma}(t) = t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mathbf{a} = t\mathbf{b} + (1 - t)\mathbf{a}.$$

Η φορά διαγραφής του ευθυγράμμου τμήματος είναι από το άκρο $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{a}$ προς το άκρο $\boldsymbol{\sigma}(1) = \mathbf{b}$.

Επίσης, αν (x_0, y_0) είναι σημείο του $\mathbb{R}^2$ και $r > 0$, τότε η συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (r \cos t + x_0, r \sin t + y_0), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

έχει ως τροχιά ολόκληρο τον κύκλο με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r: όταν το t διατρέχει το διάστημα $[0, 2\pi]$ το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ διατρέχει ολόκληρο το σύνολο $\{(x, y) \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$. Η συγκεκριμένη καμπύλη είναι προφανώς κλειστή: $\boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}(2\pi) = (r + x_0, y_0)$. Η φορά διαγραφής του κύκλου γύρω από το κέντρο του ταυτίζεται με την αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Αυτή η φορά περιστροφής ονομάζεται θετική φορά περιστροφής. Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{\sigma}$ σε ένα υποδιάστημα I του $[0, 2\pi]$, τότε η τροχιά της καμπύλης θα είναι ένα τόξο του κύκλου. Αν μεγαλώσουμε του πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{\sigma}$ σε διάστημα μεγαλύτερο του $[0, 2\pi]$, τότε η τροχιά της καμπύλης θα είναι πάλι ολόκληρος ο κύκλος αλλά το μεταβλητό σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ θα περάσει από κάποια σημεία του κύκλου περισσότερες από μία φορές. Στην ακραία περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, +\infty)$ το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ θα περιστραφεί άπειρες φορές πάνω στον κύκλο.

Τέλος, αν $r > 0$ και το λ είναι αριθμός $\neq 0$, η συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0, \lambda t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

είναι καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$. Η τροχιά της έχει ελικοειδές σχήμα και βρίσκεται πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια K η οποία είναι κατακόρυφη και τέμνει το xy-επίπεδο στον κύκλο κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας r. Όταν το t αυξάνεται στο $[0, 2\pi]$ το $\boldsymbol{\sigma}(t)$ περιστρέφεται πάνω στην επιφάνεια K: αν $\lambda > 0$, το $\boldsymbol{\sigma}(t)$ περιστρέφεται και συγχρόνως ανεβαίνει ενώ, αν $\lambda < 0$, το $\boldsymbol{\sigma}(t)$ περιστρέφεται και συγχρόνως κατεβαίνει. Τα δύο άκρα της τροχιάς βρίσκονται πάνω στην ίδια κατακόρυφη ευθεία και έχουν διαφορά ύψους ίση με $2\pi\lambda$.

Εδώ πρέπει να τονιστεί ένα σημείο που μπορεί να προκαλεί σύγχυση. Κάνουμε διάκριση ανάμεσα στην έννοια της καμπύλης (η οποία είναι μία συνάρτηση) και στην έννοια της τροχιάς της καμπύλης (το σύνολο τιμών της). Π.χ. στο δεύτερο παράδειγμα η καμπύλη είναι η συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma}$ με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0)$ ενώ η τροχιά της είναι ο κύκλος με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r, δηλαδή ένα σχήμα στο xy-επίπεδο. Όμως, έχουμε συνηθίσει παραδοσιακά να χαρακτηρίζουμε *καμπύλη* και τον κύκλο, δηλαδή το συγκεκριμένο σχήμα στο xy-επίπεδο. Το ίδιο γίνεται και στο πρώτο παράδειγμα. Χαρακτηρίζουμε -αυστηρά- καμπύλη την συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma}$ με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a}$ αλλά και το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, δηλαδή την τροχιά της καμπύλης. Λόγω συνήθειας η διπλή χρήση της λέξης "καμπύλη" είναι αναπόφευκτη και θα πρέπει κάθε φορά να ξεχωρίζουμε από τα συμφραζόμενα αν αναφερόμαστε σε καμπύλη-συνάρτηση ή σε καμπύλη-τροχιά.

Η καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ είναι παραγωγίσιμη ως διανυσματική συνάρτηση σε κάποιο εσωτερικό σημείο t_0 του I αν και μόνο αν καθεμία από τις συντεταγμένες συναρτήσεις x, y ή x, y, z είναι παραγωγίσιμη στο t_0. Η παράγωγος της $\boldsymbol{\sigma}$ στο t_0 είναι το όριο $\lim_{t\to t_0} \frac{\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{\sigma}(t_0)}{t-t_0}$ και συμβολίζεται $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$. Στην περίπτωση καμπύλης στον $\mathbb{R}^2$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{\sigma}(t_0)}{t-t_0} &= \lim_{t\to t_0}\frac{(x(t),y(t))-(x(t_0),y(t_0))}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{(x(t)-x(t_0),y(t)-y(t_0))}{t-t_0}\\
&= \lim_{t\to t_0}\Big(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\Big) = \Big(\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\Big)\\
&= (x'(t_0), y'(t_0)).
\end{aligned}$$

Παρόμοιος υπολογισμός γίνεται και για καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\boldsymbol{\sigma}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \text{ ή } (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$ ονομάζεται και (διανυσματική) ταχύτητα της καμπύλης, διότι εκφράζει τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της θέσης του κινητού $\boldsymbol{\sigma}(t)$ ως προς τον χρόνο t την χρονική στιγμή t_0. Το μήκος $\|\boldsymbol{\sigma}'(t_0)\|$ της ταχύτητας, δηλαδή το

$$\|\boldsymbol{\sigma}'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2} \text{ ή } \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + (z'(t_0))^2},$$

ονομάζεται αριθμητική ή βαθμωτή ταχύτητα. Η παράγωγος (ή ταχύτητα) $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$, αν την δούμε ως διάνυσμα με αρχή το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ της τροχιάς, είναι εφαπτόμενη στην τροχιά στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ και η κατεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{\sigma}'(t_0)$ συμπίπτει με την κατεύθυνση διαγραφής της τροχιάς κοντά στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$.

Αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $\boldsymbol{\sigma}'_+(t_0)$ και $\boldsymbol{\sigma}'_-(t_0)$ στο t_0 αλλά δεν έχουν (ως διανύσματα) την ίδια κατεύθυνση, τότε η τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ σχηματίζει γωνία στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$. Το διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}'_+(t_0)$ είναι εφαπτόμενο στο τμήμα της τροχιάς που ξεκινάει από το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ (δηλαδή για $t \geq t_0$) ενώ το διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}'_-(t_0)$ είναι εφαπτόμενο στην *προέκταση* του τμήματος της τροχιάς που καταλήγει στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ (δηλαδή για $t \leq t_0$).

Μία καμπύλη $\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ την χαρακτηρίζουμε λεία ή ομαλή αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος I και η παράγωγος $\boldsymbol{\sigma}'$ είναι συνεχής στο I. Η $\boldsymbol{\sigma}$ θα λέγεται τμηματικά λεία ή ομαλή αν το I χωρίζεται σε διαδοχικά υποδιαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ έτσι ώστε σε κάθε υποδιάστημα I_k η παράγωγος $\boldsymbol{\sigma}'$ υπάρχει (στα άκρα του I_k θεωρούμε τις πλευρικές παραγώγους) και είναι συνεχής στο I_k.

Η καμπύλη που διαγράφει τον κύκλο κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας r, δηλαδή η καμπύλη με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0)$, $t \in [0, 2\pi]$, είναι λεία. Πράγματι, η $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$. Ομοίως, η καμπύλη με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a}$, $t \in [0, 1]$, που διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ είναι κι αυτή λεία: η $\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Η ελικοειδής καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0, \lambda t)$, $t \in [0, 2\pi]$, είναι λεία, αφού η $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (-r\sin t, r\cos t, \lambda)$ είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$. Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα. Η καμπύλη με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{cases} t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a}, & 0 \le t \le 1 \\ (t-1)\mathbf{c} + (2-t)\mathbf{b}, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

έχει παράγωγο

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \begin{cases} \mathbf{b} - \mathbf{a}, & 0 \le t < 1 \\ \mathbf{c} - \mathbf{b}, & 1 < t \le 2 \end{cases}$$

Στο $t = 1$ υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι: $\boldsymbol{\sigma}'_-(1) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ και $\boldsymbol{\sigma}'_+(1) = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. Αν $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, τότε η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι λεία, ενώ αν $\mathbf{b} - \mathbf{a} \neq \mathbf{c} - \mathbf{b}$, τότε η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι τμηματικά λεία. Η τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η ένωση των ευθυγράμμων τμημάτων από το $\mathbf{a}$ στο $\mathbf{b}$ και από το $\mathbf{b}$ στο $\mathbf{c}$.

Όσα είπαμε μέχρι τώρα είναι γνωστά. Τώρα θα μελετήσουμε μία νέα έννοια: το **μήκος** μιας καμπύλης.

Θεωρούμε μία λεία καμπύλη $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ και μία πολύ λεπτή διαμέριση του $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Τότε η $\boldsymbol{\sigma}$ προσεγγίζεται από την πολυγωνική καμπύλη με κορυφές τα διαδοχικά σημεία

$$\boldsymbol{\sigma}(a) = \boldsymbol{\sigma}(t_0), \boldsymbol{\sigma}(t_1), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(t_{k-1}), \boldsymbol{\sigma}(t_k), \ldots \boldsymbol{\sigma}(t_{n-1}), \boldsymbol{\sigma}(t_n) = \boldsymbol{\sigma}(b).$$

Όσο λεπτότερη είναι η διαμέριση του $[a, b]$ τόσο πιο πολύ τείνει να ταυτιστεί η πολυγωνική καμπύλη με την $\boldsymbol{\sigma}$ και άρα τόσο πιο κοντά είναι το μήκος της πολυγωνικής καμπύλης στο μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$. Τώρα, το μήκος της πολυγωνικής καμπύλης είναι προφανώς ίσο με το άθροισμα των διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων που την αποτελούν, δηλαδή ίσο με

$$\sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{\sigma}(t_k) - \boldsymbol{\sigma}(t_{k-1})\|. \tag{53}$$

Άρα το μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ίσο με το όριο του αθροίσματος (53) όταν $\max_{1 \le k \le n}(t_k - t_{k-1}) \to 0$. Θα δούμε τώρα ποιό είναι αυτό το όριο. Ας πάρουμε την περίπτωση που η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$, δηλαδή $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ για $t \in [a, b]$. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι λεία και άρα οι παράγωγοι x', y' είναι συνεχείς στο $[a, b]$. Όταν το $\max_{1 \le k \le n}(t_k - t_{k-1})$ είναι πολύ μικρό, οι τιμές της x' είναι περίπου ίσες στο υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ και άρα

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\eta)(t_k - t_{k-1}) \approx x'(t_k)(t_k - t_{k-1}),$$

όπου η είναι κάποιο σημείο στο $[t_{k-1}, t_k]$. Ομοίως

$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\zeta)(t_k - t_{k-1}) \approx y'(t_k)(t_k - t_{k-1}),$$

όπου ζ είναι κάποιο σημείο στο $[t_{k-1}, t_k]$. Άρα

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\sigma}(t_k) - \boldsymbol{\sigma}(t_{k-1})\| &= \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \\
&\approx \sqrt{(x'(t_k))^2(t_k - t_{k-1})^2 + (y'(t_k))^2(t_k - t_{k-1})^2} \\
&= \sqrt{(x'(t_k))^2 + (y'(t_k))^2}\,(t_k - t_{k-1}) \\
&= \|\boldsymbol{\sigma}'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}).
\end{aligned} \tag{54}$$

Ίδιοι υπολογισμοί γίνονται και στην περίπτωση που η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$.
Επομένως, το άθροισμα (53) είναι περίπου ίσο με το

$$\sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{\sigma}'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}), \tag{55}$$

δηλαδή έχει την μορφή αθροίσματος Riemann της συνάρτησης $\|\boldsymbol{\sigma}'\|$ στο διάστημα $[a, b]$. Επειδή αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής, το όριο του αθροίσματος Riemann (55) είναι ίσο με το ολοκλήρωμά της στο $[a, b]$. Άρα το μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$, που είναι ίσο με το όριο του αθροίσματος (53) και άρα ίσο με το όριο του αθροίσματος Riemann (55), πρέπει να είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\|\boldsymbol{\sigma}'\|$ στο διάστημα $[a, b]$. Αν συμβολίσουμε S το μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$, τότε έχουμε αποδείξει ότι

$$S = \int_a^b \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt$$

και με τις συντεταγμένες συναρτήσεις

$$S = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \ \text{ ή } \ \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

Οι ίδιοι τύποι δίνουν το μήκος S της $\boldsymbol{\sigma}$ ακόμη κι αν αυτή είναι τμηματικά λεία.

Η καμπύλη με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a}$, $t \in [0, 1]$, έχει $\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ και άρα έχει μήκος

$$S = \int_0^1 \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt = \int_0^1 \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|\,dt = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|.$$

Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού η τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. (Εξ άλλου, αυτό το εκ των προτέρων γνωστό αποτέλεσμα χρησιμοποιήθηκε για να εκφράσουμε το μήκος πολυγωνικής καμπύλης ώστε να καταλήξουμε στον τύπο του μήκους της γενικής καμπύλης.)

Η καμπύλη με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t + x_0, r\sin t + y_0)$, $t \in [0, 2\pi]$, έχει $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ και άρα έχει μήκος

$$S = \int_0^{2\pi} \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Πράγματι, αυτός είναι ο γνωστός τύπος του μήκους ενός κύκλου ακτίνας r.

Μία νέα έννοια που θα μελετήσουμε τώρα είναι η έννοια της **αλλαγής παραμέτρου** ή **αναπαραμέτρισης** μίας καμπύλης. Θεωρούμε καμπύλη

$$\boldsymbol{\sigma} : I \to \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathbb{R}^3$$

όπου I είναι διάστημα (όχι μονοσύνολο) στο $\mathbb{R}$ και μία συνεχή συνάρτηση

$$h : J \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} I,$$

όπου J είναι ένα άλλο διάστημα (όχι μονοσύνολο) στο $\mathbb{R}$. Τότε η σύνθεση

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \circ h : J \to \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathbb{R}^3$$

είναι συνεχής και άρα είναι μία νέα καμπύλη στον ίδιο χώρο με την $\boldsymbol{\sigma}$.

Είναι γνωστό(;) ότι μια συνεχής συνάρτηση, εδώ η h, από ένα διάστημα σε ένα άλλο διάστημα η οποία είναι ένα προς ένα πρέπει να είναι γνησίως μονότονη. Έχουμε δύο περιπτώσεις. (i) Έστω ότι η h είναι γνησίως αύξουσα. Όταν το u αυξάνεται στο διάστημα J, τότε το $t = h(u)$ αυξάνεται στο διάστημα I και άρα το σημείο $\boldsymbol{\rho}(u) = \boldsymbol{\sigma}(h(u)) = \boldsymbol{\sigma}(t)$ διατρέχει την τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ με την φορά διαγραφής της $\boldsymbol{\sigma}$. Δηλαδή, η τροχιά της $\boldsymbol{\rho}$ είναι ίδια με την τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ και οι δύο καμπύλες έχουν την ίδια φορά διαγραφής. (ii) Έστω ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα. Όταν το u αυξάνεται στο διάστημα J, τότε το $t = h(u)$ ελαττώνεται στο διάστημα I και άρα το σημείο $\boldsymbol{\rho}(u) = \boldsymbol{\sigma}(h(u)) = \boldsymbol{\sigma}(t)$ διατρέχει την τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ με την αντίθετη φορά από την φορά διαγραφής της $\boldsymbol{\sigma}$. Δηλαδή, η τροχιά της $\boldsymbol{\rho}$ είναι ίδια με την τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$ και οι δύο καμπύλες έχουν αντίθετες φορές διαγραφής.

Η συνάρτηση h ονομάζεται *αλλαγή παραμέτρου* ή *αναπαραμέτριση*: αλλάζει την αρχική παράμετρο t σε μια νέα παράμετρο u και το αρχικό παραμετρικό διάστημα I στο νέο παραμετρικό διάστημα J. Η καμπύλη $\boldsymbol{\rho}$ ονομάζεται *αναπαραμέτριση* της $\boldsymbol{\sigma}$.

Συνήθως θεωρούμε την αλλαγή παραμέτρου h να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Έτσι, αν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (δηλαδή λεία), τότε και η σύνθεση $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \circ h$ είναι συνεχώς παραγωγίσμη (δηλαδή λεία). Έχουμε και τον κανόνα αλυσίδας:

$$\boldsymbol{\rho}'(u) = \boldsymbol{\sigma}'(h(u))h'(u) = \boldsymbol{\sigma}'(t)h'(u) \qquad (t = h(u)). \tag{56}$$

Ας δούμε τί λέει αυτή η ισότητα. Όπως είδαμε, οι καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho}$ έχουν την ίδια τροχιά. Για μια τιμή του u στο J και για την αντίστοιχη τιμή του $t = h(u)$ στο I, το σημείο $\boldsymbol{\rho}(u)$ και το σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ ταυτίζονται: $\boldsymbol{\rho}(u) = \boldsymbol{\sigma}(h(u)) = \boldsymbol{\sigma}(t)$. Στο ίδιο αυτό σημείο έχουμε δύο εφαπτόμενα διανύσματα στην κοινή τροχιά: το ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ προκύπτει από την καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ και το άλλο εφαπτόμενο διάνυσμα $\boldsymbol{\rho}'(u)$ προκύπτει από την καμπύλη $\boldsymbol{\rho}$. Είναι λογικό αυτά τα διανύσματα να είναι συγγραμμικά: βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, την εφαπτομένη της κοινής τροχιάς στο ίδιο σημείο της. Η (56) μας λέει αυτό ακριβώς: τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου με έναν αριθμό: τον αριθμό $h'(u)$. Και βλέπουμε, επίσης, ότι, αν η h είναι γνησίως αύξουσα, τότε τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα έχουν την ίδια φορά αφού $h'(u) \geq 0$ ενώ, αν η h είναι γνησίως φθίνουσα, τότε τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα έχουν αντίθετη φορά αφού $h'(u) \leq 0$. Επιβεβαιώνουμε έτσι την διατήρηση ή την αλλαγή φοράς διαγραφής της τροχιάς ανάλογα με το αν η h είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Επειδή μία αλλαγή παραμέτρου δεν αλλάζει την τροχιά μιας καμπύλης, λογικά θα πρέπει να μην αλλάζει ούτε το μήκος μιας καμπύλης. Ας το αποδείξουμε. Αν $I = [a, b]$, το μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ίσο με $\int_a^b \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt$ και, αν $J = [c, d]$, το μήκος της $\boldsymbol{\rho}$ είναι ίσο με $\int_c^d \|\boldsymbol{\rho}'(u)\|\, du$. Θα δούμε ότι τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα και έχουμε δύο περιπτώσεις.

(i) Έστω ότι η $h : [c, d] \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} [a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα. Τότε $h(c) = a$, $h(d) = b$ και είναι $h'(u) \geq 0$ για κάθε $u \in [c, d]$. Άρα

$$\int_a^b \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_c^d \|\boldsymbol{\sigma}'(h(u))\| h'(u)\, du = \int_c^d \|\boldsymbol{\sigma}'(h(u))h'(u)\|\, du = \int_c^d \|\boldsymbol{\rho}'(u)\|\, du.$$

(ii) Έστω ότι η $h : [c, d] \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} [a, b]$ είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε $h(c) = b$, $h(d) = a$ και είναι $h'(u) \leq 0$ για κάθε $u \in [c, d]$. Άρα

$$\int_a^b \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_d^c \|\boldsymbol{\sigma}'(h(u))\| h'(u)\, du = -\int_d^c \|\boldsymbol{\sigma}'(h(u))h'(u)\|\, du = \int_c^d \|\boldsymbol{\rho}'(u)\|\, du.$$

Άρα *το μήκος καμπύλης μένει αμετάβλητο μετά από αναπαραμέτρισή της.*

Αξίζει να αναφέρουμε ότι πάντοτε μπορούμε να κάνουμε κατάλληλη αλλαγή παραμέτρου καμπύλης ώστε να μετατρέψουμε το δοσμένο παραμετρικό διάστημα σε ένα οποιοδήποτε άλλο παραμετρικό διάστημα. Πράγματι, αν $I = [a, b]$ και $J = [c, d]$, τότε υπάρχει $h : [c, d] \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} [a, b]$. Για παράδειγμα μπορούμε να βρούμε αριθμούς k, l ώστε η h να έχει τον απλό τύπο $h(u) = ku + l$. Αρκεί να ικανοποιείται το σύστημα $kc + l = h(c) = a$, $kd + l = h(d) = b$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $k = (b - a)/(d - c)$ και $l = (ad - bc)/(d - c)$ και την συνάρτηση

$$t = h(u) = \frac{b-a}{d-c}\,u + \frac{ad-bc}{d-c}.$$

Η συγκεκριμένη h είναι γνησίως αύξουσα. Αν θέλουμε να είναι γνησίως φθίνουσα, λύνουμε το σύστημα $kc + l = h(c) = b$, $kd + l = h(d) = a$ και βρίσκουμε την συνάρτηση

$$t = h(u) = \frac{a-b}{d-c}\,u + \frac{bd-ac}{d-c}.$$

Η τρίτη νέα έννοια που θα δούμε είναι η έννοια της **συγκόλλησης διαδοχικών καμπυλών**. Θεωρούμε δύο *διαδοχικές* καμπύλες $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ και $\boldsymbol{\rho} : [b, c] \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$. (Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα διαστήματα στα οποία ορίζονται οι καμπύλες είναι διαδοχικά, αφού μπορούμε να κάνουμε αλλαγές παραμέτρου και να μετατρέψουμε μη-διαδοχικά παραμετρικά διαστήματα σε διαδοχικά.) Το ότι οι καμπύλες είναι διαδοχικές σημαίνει ότι το τελικό άκρο της πρώτης ταυτίζεται με το αρχικό άκρο της δεύτερης, δηλαδή

$$\boldsymbol{\sigma}(b) = \boldsymbol{\rho}(b).$$

Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε μία καμπύλη την οποία θα συμβολίσουμε $\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho} : [a, c] \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ με τύπο

$$(\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho})(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(t), & a \le t \le b \\ \boldsymbol{\rho}(t), & b \le t \le c \end{cases}$$

Η συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho}$ είναι προφανώς συνεχής στο $[a, c]$, λόγω της $\boldsymbol{\sigma}(b) = \boldsymbol{\rho}(b)$. Το αρχικό άκρο της $\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho}$ είναι το αρχικό άκρο της $\boldsymbol{\sigma}$ και το τελικό άκρο της είναι το τελικό άκρο της $\boldsymbol{\rho}$. Η τροχιά της $\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho}$ είναι η ένωση των τροχιών των $\boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho}$. Αν οι $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\rho}$ είναι λείες, τότε η $\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho}$ είναι τμηματικά λεία. Λέμε ότι η $\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho}$ είναι η *συγκόλληση* των $\boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho}$ (με αυτήν την σειρά).

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι *το μήκος της* $\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho}$ *είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των* $\boldsymbol{\sigma}$ *και* $\boldsymbol{\rho}$:

$$\begin{aligned}\int_a^c \|(\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho})'(t)\|\, dt &= \int_a^b \|(\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho})'(t)\|\, dt + \int_b^c \|(\boldsymbol{\sigma} \dot{+} \boldsymbol{\rho})'(t)\|\, dt \\ &= \int_a^b \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt + \int_b^c \|\boldsymbol{\rho}'(t)\|\, dt.\end{aligned}$$

Τώρα θα δούμε πώς ολοκληρώνουμε αριθμητικές και διανυσματικές συναρτήσεις πάνω σε καμπύλες. Αυτό είναι ένα πολύ βασικό μέρος του μαθήματος.

Έστω

$$\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathbb{R}^3$$

μία λεία (ή τμηματικά λεία) καμπύλη και έστω και μία αριθμητική ή βαθμωτή συνάρτηση

$$f : \boldsymbol{\sigma}([a, b]) \to \mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής στο σύνολο $\boldsymbol{\sigma}([a,b])$, δηλαδή στην τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$. Τότε ορίζουμε το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της βαθμωτής συνάρτησης** f **κατά μήκος της** $\boldsymbol{\sigma}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,dS &= \int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt \\ &= \int_a^b f(x(t),y(t))\,\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \\ &\text{ή} \\ &\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.\end{aligned} \tag{57}$$

Το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,dS$ είναι το σύμβολο του επικαμπυλίου ολοκληρώματος της f κατά μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$.

Παράδειγμα. Έστω η καμπύλη με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$, και η βαθμωτή συνάρτηση με τύπο $f(x,y) = x+y$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,dS &= \int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}(r\cos t + r\sin t)r\,dt = r^2\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

Για να καταλάβουμε καλύτερα το περιεχόμενο της έννοιας του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, θα μιμηθούμε τον ορισμό του συνηθισμένου ολοκληρώματος βαθμωτής συνάρτησης σε διάστημα του $\mathbb{R}$ μόνο που τώρα δεν θα έχουμε διάστημα του $\mathbb{R}$ αλλά την τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$. Αντί να θεωρήσουμε διαμερίσεις ενός διαστήματος του $\mathbb{R}$ θα θεωρήσουμε διαμερίσεις της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$. Θα πάρουμε, λοιπόν, μια διαμέριση της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$ σε πολύ μικρά διαδοχικά κομματάκια, σε κάθε κομματάκι θα θεωρήσουμε ένα σημείο του και θα βρούμε την τιμή της f σ' αυτό το σημείο και θα πολλαπλασιάσουμε αυτήν την τιμή της f με το μήκος του κομματιού. Τέλος, θα προσθέσουμε όλα αυτά τα γινόμενα που αντιστοιχούν στα κομματάκια της $\boldsymbol{\sigma}$. Ωραία! Για να φτιάξουμε μια διαμέριση της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$ παίρνουμε μια διαμέριση του παραμετρικού διαστήματος (όπως κάναμε όταν θέλαμε να βρούμε το μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$):

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Τα αντίστοιχα σημεία

$$\boldsymbol{\sigma}(a) = \boldsymbol{\sigma}(t_0), \boldsymbol{\sigma}(t_1), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(t_{k-1}), \boldsymbol{\sigma}(t_k), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(t_{n-1}), \boldsymbol{\sigma}(t_n) = \boldsymbol{\sigma}(b)$$

αποτελούν μια διαμέριση της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$ σε διαδοχικά κομματάκια της. Το μήκος του κομματιού αναμεσα στα διαδοχικά σημεία $\boldsymbol{\sigma}(t_{k-1})$, $\boldsymbol{\sigma}(t_k)$ είναι περίπου ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος με τα ίδια άκρα που, όπως μας λέει η (54), είναι

$$\|\boldsymbol{\sigma}(t_k) - \boldsymbol{\sigma}(t_{k-1})\| \approx \|\boldsymbol{\sigma}'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}).$$

Πολλαπλασιάζουμε αυτό το μήκος με την τιμή της f στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_k)$ του κομματιού και, όπως έχουμε σκοπό να κάνουμε, προσθέτουμε τα αντίστοιχα γινόμενα για τα διάφορα κομμάτια:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\boldsymbol{\sigma}(t_k))\|\boldsymbol{\sigma}'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}).$$

Αυτό, όμως, το άθροισμα είναι το συνηθισμένο άθροισμα Riemann μιας βαθμωτής συνάρτησης σε διάστημα του $\mathbb{R}$: η συνάρτηση είναι η $f(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|$ και το διάστημα είναι το $[a,b]$. Άρα όταν η διαμέριση γίνεται όλο και πιο λεπτή, το άθροισμα αυτό θα τείνει στο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt$$

δηλαδή σ'αυτό που συμβολίσαμε $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,dS$ στην (57) και ονομάσαμε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της βαθμωτής συνάρτησης f κατά μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$.

Για να μας γίνουν λίγο πιο οικεία τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε, ας θυμηθούμε πάλι τον τύπο για το μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$: $S = \int_a^b \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt$. Αν θέλουμε το μήκος του κομματιού της $\boldsymbol{\sigma}$ που αντιστοιχεί στο παραμετρικό διάστημα $[a,t]$ για κάποιο $t \in [a,b]$ θα το βρούμε με τον ίδιο τύπο αλλά για το διάστημα $[a,t]$:

$$S(t) = \int_a^t \|\boldsymbol{\sigma}'(\tau)\|\,d\tau,$$

όπου τώρα το μήκος το βλέπουμε ως συνάρτηση του $t \in [a,b]$. Η $S(t)$ είναι η λεγόμενη **συνάρτηση μήκους** της $\boldsymbol{\sigma}$. Τώρα είναι προφανές ότι το μήκος ΔS του κομματιού της $\boldsymbol{\sigma}$ που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο κοντινά σημεία της, τα $\boldsymbol{\sigma}(t)$ και $\boldsymbol{\sigma}(t+\Delta t)$ είναι ίσο με τη διαφορά του μήκους του κομματιού της καμπύλης ανάμεσα στα $\boldsymbol{\sigma}(a)$ και $\boldsymbol{\sigma}(t+\Delta t)$ και του μήκους του κομματιού της ανάμεσα στα $\boldsymbol{\sigma}(a)$ και $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Δηλαδή,

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t),$$

οπότε

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = S'(t) = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|$$

αφού η παράγωγος του αόριστου ολοκληρώματος ισούται με την ολοκληρωτέα συνάρτηση (Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού). Με άλλα λόγια,

$$\frac{dS}{dt} = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|,$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$dS = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|dt. \tag{58}$$

Ελπίζω ότι έτσι φαίνεται κάπως λογική η "αντικατάσταση" του dS με το $\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|dt$ όταν γράφουμε την ισότητα $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,dS = \int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt$: είναι σαν να κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $S = S(t)$ και να παίρνουμε $dS = S'(t)dt$ που γίνεται $dS = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|dt$ ακριβώς επειδή $S'(t) = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|$.

Και αλλιώς. Για το συνηθισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ λέμε ότι ολοκληρώνουμε τις τιμές της f στο διάστημα $[a,b]$ (δηλαδή τις τιμές $f(x)$) ως προς το στοιχειώδες μήκος (δηλαδή το dx)". Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,dS$ λέμε, αναλόγως, ότι *ολοκληρώνουμε τις τιμές της f στην καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ (δηλαδή τις τιμές $f(\boldsymbol{\sigma}(t))$) ως προς το στοιχειώδες μήκος (δηλαδή το $dS = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|dt$).*

Έχουμε τις εξής ιδιότητες:

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}}(\kappa f + \lambda g)\,dS = \kappa\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,dS + \lambda\int_{\boldsymbol{\sigma}} g\,dS.$$

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}\dot{+}\boldsymbol{\rho}} f\,dS = \int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,dS + \int_{\boldsymbol{\rho}} f\,dS.$$

Αποδεικνύουμε την πρώτη:

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}}(\kappa f + \lambda g)\,dS &= \int_a^b (\kappa f(\boldsymbol{\sigma}(t)) + \lambda g(\boldsymbol{\sigma}(t)))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt\\ &= \kappa\int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt + \lambda\int_a^b g(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt\\ &= \kappa\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,dS + \lambda\int_{\boldsymbol{\sigma}} g\,dS.\end{aligned}$$

Αποδείξτε εσείς την δεύτερη ιδιότητα. Μιμηθείτε την απόδειξη για το μήκος της $\boldsymbol{\sigma}\dot{+}\boldsymbol{\rho}$.

Τρίτη ιδιότητα. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης μένει αμετάβλητο μετά από αλλαγή παραμέτρου: αν $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}\circ h$, όπου h είναι αλλαγή παραμέτρου, τότε*

$$\int_{\boldsymbol{\rho}} f\,dS = \int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,dS.$$

Έχουμε δύο περιπτώσεις. (i) Αν η $h : [c,d] \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} [a,b]$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε $h(c) = a$, $h(d) = b$ και $h'(u) \geq 0$ για κάθε $u \in [c,d]$. Άρα

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, dS &= \int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_c^d f(\boldsymbol{\sigma}(h(u)))\|\boldsymbol{\sigma}'(h(u))\|h'(u)\, du \\ &= \int_c^d f(\boldsymbol{\rho}(u))\|\boldsymbol{\sigma}'(h(u))h'(u)\|\, du = \int_c^d f(\boldsymbol{\rho}(u))\|\boldsymbol{\rho}'(u)\|\, du = \int_{\boldsymbol{\rho}} f\, dS.\end{aligned}$$

(ii) Αν η $h : [c,d] \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} [a,b]$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $h(c) = b$, $h(d) = a$ και $h'(u) \leq 0$ για κάθε $u \in [c,d]$. Άρα

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, dS &= \int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_d^c f(\boldsymbol{\sigma}(h(u)))\|\boldsymbol{\sigma}'(h(u))\|h'(u)\, du \\ &= \int_c^d f(\boldsymbol{\rho}(u))\|\boldsymbol{\sigma}'(h(u))h'(u)\|\, du = \int_c^d f(\boldsymbol{\rho}(u))\|\boldsymbol{\rho}'(u)\|\, du = \int_{\boldsymbol{\rho}} f\, dS.\end{aligned}$$

Τέταρτη ιδιότητα. *Αν ισχύει $|f(\mathbf{a})| \leq M$ για κάθε σημείο $\mathbf{a}$ στην τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$, τότε*

$$\Big|\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, dS\Big| \leq MS,$$

όπου S είναι το μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, dS\Big| &= \Big|\int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt\Big| \leq \int_a^b |f(\boldsymbol{\sigma}(t))|\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt \\ &\leq \int_a^b M\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = M\int_a^b \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = MS.\end{aligned}$$

Τώρα θα πάμε στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης. Έστω

$$\boldsymbol{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathbb{R}^3$$

μία καμπύλη και έστω και μία διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{f} : \boldsymbol{\sigma}([a,b]) \to \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathbb{R}^3$$

η οποία είναι συνεχής στο σύνολο $\boldsymbol{\sigma}([a,b])$, δηλαδή στην τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$. Προσοχή: οι τιμές των $\boldsymbol{\sigma}$ και $\mathbf{f}$ πρέπει να είναι στον ίδιο χώρο, είτε και οι δύο στον $\mathbb{R}^2$ είτε και οι δύο στον $\mathbb{R}^3$. Τότε ορίζουμε το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης f κατά μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$** ως εξής:

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt. \tag{59}$$

Το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$ είναι το σύμβολο του επικαμπυλίου ολοκληρώματος της $\mathbf{f}$ κατά μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$. Προσέξτε την κουκίδα $\cdot$ που δηλώνει εσωτερικό γινόμενο. Η υπόθεσή μας ότι οι τιμές των $\boldsymbol{\sigma}$ και $\mathbf{f}$ πρέπει να είναι στον ίδιο χώρο και, επομένως, ότι οι τιμές των $\boldsymbol{\sigma}'$ και $\mathbf{f}$ πρέπει να είναι στον ίδιο χώρο χρειάζεται ώστε να ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο $f(\boldsymbol{\sigma}(t))\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)$.

Παράδειγμα. Έστω η καμπύλη με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$, και η διανυσματική συνάρτηση με τύπο $\mathbf{f}(x,y) = (y,x)$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t))\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(r\cos t, r\sin t)\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (r\sin t, r\cos t)\cdot(-r\sin t, r\cos t)\, dt = r^2\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 0.\end{aligned}$$

Τώρα θα δούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα *διανυσματικής* συνάρτησης στη μορφή επικαμπυλίου ολοκληρώματος *βαθμωτής* συνάρτησης. Αν σε οποιοδήποτε σημείο $\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}(t)$ της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$ συμβολίσουμε $\mathbf{T}(\mathbf{a}) = \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ το *μοναδιαίο* εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά με κατεύθυνση ίδια με την φορά διαγραφής της τροχιάς, τότε πρέπει να είναι

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|}.$$

Άρα

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \boldsymbol{\sigma}'(t)$$

και άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματκής $\mathbf{f}$ γράφεται

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt = \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt. \tag{60}$$

Τώρα, αν ορίσουμε την *βαθμωτή* συνάρτηση $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T} : \boldsymbol{\sigma}([a, b]) \to \mathbb{R}$ ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσματικών συναρτήσεων $\mathbf{f} : \boldsymbol{\sigma}([a, b]) \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{T} : \boldsymbol{\sigma}([a, b]) \to \mathbb{R}$, δηλαδή με τύπο $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{T})(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{a})$ για κάθε σημείο $\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}(t)$ της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$, τότε από την (60) έχουμε ότι

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_a^b (\mathbf{f} \cdot \mathbf{T})(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS. \tag{61}$$

Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής $\mathbf{f}$ ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της βαθμωτής $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$.

Προσέξτε την φορμαλιστική σχέση $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}dS$ που εμφανίζεται να συνδέει τα δύο άκρα της (61). Αυτή αιτιολογείται μέσω της άλλης φορμαλιστικής σχέσης (58). Πράγματι,

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}'(t)dt = \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|dt = \mathbf{T}dS,$$

όπου απλοποιούμε το $\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ σε $\mathbf{T}$.

Τώρα θυμόμαστε ότι όταν έχουμε δύο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ στον ίδιο χώρο με $\|\mathbf{v}\| = 1$, τότε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cos\theta$, όπου $\theta \in [0, \pi]$ είναι η κυρτή γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα, και άρα το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ είναι η *προσημασμένη προβολή* του $\mathbf{u}$ πάνω στην ευθεία που περιέχει το $\mathbf{v}$: έχει θετικό πρόσημο όταν $0 \leq \theta < \pi/2$ και άρα η προβολή του $\mathbf{u}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{v}$ και έχει αρνητικό πρόσημο όταν $\pi/2 < \theta \leq \pi$ και άρα η προβολή του $\mathbf{u}$ έχει αντίθετη κατεύθυνση με το $\mathbf{v}$. Προφανώς, η προβολή του $\mathbf{u}$ είναι ίση με 0 όταν $\theta = \pi/2$, δηλαδή όταν τα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ είναι κάθετα.

Άρα η βαθμωτή συνάρτηση $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$ είναι η προσημασμένη προβολή της διανυσματικής $\mathbf{f}$ πάνω στις εφαπτόμενες της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$. Άρα μπορούμε να πούμε ότι *το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής* $\mathbf{f}$ *κατά μήκος της* $\boldsymbol{\sigma}$ *είναι ίσο με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της βαθμωτής* $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$ *κατά μήκος της* $\boldsymbol{\sigma}$ ή, με άλλα λόγια, ότι *ολοκληρώνουμε τις προσημασμένες προβολές της* $\mathbf{f}$ *πάνω στις εφαπτόμενες της τροχιάς της* $\boldsymbol{\sigma}$ *ως προς το στοιχειώδες μήκος.*

Τώρα θα δούμε και το φυσικό περιεχόμενο της έννοιας του επικαμπύλιου ολοκληρώματος διανυσματικής συνάρτησης. Ας θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ εκφράζει μία *δύναμη* εφαρμοσμένη στο σημείο $\mathbf{a}$. Δηλαδή ότι τα $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ είναι δυνάμεις που εφαρμόζονται στα διάφορα σημεία $\boldsymbol{\sigma}(t)$ της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$. Θα βρούμε μια μαθηματική έκφραση για το συνολικό έργο που παράγουν αυτές οι δυνάμεις καθώς το σημείο εφαρμογής τους $\boldsymbol{\sigma}(t)$ κινείται κατά μήκος της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$. Πριν προχωρήσουμε, θα θυμηθούμε από την Φυσική ότι το έργο που παράγει μία σταθερή δύναμη $\mathbf{f}$ κατά μήκος του ευθύγραμμου δρόμου από το σημείο $\mathbf{a}$ στο σημείο $\mathbf{b}$ ισούται με το γινόμενο της προσημασμένης προβολής της $\mathbf{f}$ πάνω στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ επί το μήκος του ευθύγραμμου δρόμου. Άρα, με $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|}$ έχουμε ότι το έργο W ισούται με

$$W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \mathbf{f} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Τώρα θα θεωρήσουμε μια διαμέριση της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$ σε πολύ μικρά διαδοχικά κομματάκια, θα θεωρήσουμε το κάθε κομματάκι περίπου ευθύγραμμο, θα βρούμε το έργο που παράγεται κατά μήκος καθενός κομματιού και θα προσθέσουμε αυτά τα "στοιχειώδη" έργα. Λόγω της φυσικής ιδιότητας που ονομάζεται "αθροιστικότητα του έργου", το συνολικό έργο κατά μήκος της τροχιάς είναι ακριβώς το άθροισμα των "στοιχειωδών" εργών. Για να φτιάξουμε μια διαμέριση της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$ παίρνουμε μια διαμέριση του παραμετρικού διαστήματος:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Τα αντίστοιχα σημεία

$$\boldsymbol{\sigma}(a) = \boldsymbol{\sigma}(t_0), \boldsymbol{\sigma}(t_1), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(t_{k-1}), \boldsymbol{\sigma}(t_k), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(t_{n-1}), \boldsymbol{\sigma}(t_n) = \boldsymbol{\sigma}(b)$$

αποτελούν μια διαμέριση της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$ σε διαδοχικά κομματάκια της. Το κομμάτι ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $\boldsymbol{\sigma}(t_{k-1})$, $\boldsymbol{\sigma}(t_k)$ είναι περίπου ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα με τα ίδια άκρα. Επίσης, επειδή τα διάφορα κομμάτια είναι πολύ μικρά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ είναι περίπου σταθερή σε κάθε κομμάτι. Άρα το έργο που παράγεται από την $\mathbf{f}$ στο κομμάτι ανάμεσα στα σημεία $\boldsymbol{\sigma}(t_{k-1})$, $\boldsymbol{\sigma}(t_k)$ είναι περίπου ίσο με

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t_k)) \cdot \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t_k))\|\boldsymbol{\sigma}(t_k) - \boldsymbol{\sigma}(t_{k-1})\| &\approx \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t_k)) \cdot \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t_k))\|\boldsymbol{\sigma}'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}) \\ &= \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t_k)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t_k)(t_k - t_{k-1}).\end{aligned}$$

Άρα το συνολικό έργο κατά μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι περίπου ίσο με το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t_k)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Αυτό είναι το συνηθισμένο άθροισμα Riemann της βαθμωτής συνάρτησης $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)$ στο διάστημα $[a, b]$. Άρα όταν η διαμέριση γίνεται όλο και πιο λεπτή, το άθροισμα αυτό θα τείνει στο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt$$

δηλαδή σ'αυτό που συμβολίσαμε $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$. Άρα το συνολικό έργο W που παράγει η (μεταβλητή) δύναμη $\mathbf{f}$ κατά μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ίσο με

$$W = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Αν εμφανίσουμε τις συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f}$ και της $\boldsymbol{\sigma}$, δηλαδή

$$\mathbf{f} = (P, Q) \text{ ή } (P, Q, R) \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{\sigma} = (x, y) \text{ ή } (x, y, z),$$

τότε $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\sigma}' = Px' + Qy'$ ή $Px' + Qy' + Rz'$ και άρα

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))\, dt \\ &\text{ή} \\ &\int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))\, dt.\end{aligned} \tag{62}$$

Για απλούστευση, χρησιμοποιούμε κάποια χρήσιμα σύμβολα για τα ολοκληρώματα που προκύπτουν. Αρχίζουμε με το

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} P\, dx = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\, dt \text{ ή } \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t)\, dt.$$

Δηλαδή, στο $P = P(x,y)$ ή $P(x,y,z)$ αντικαθιστούμε τα x, y, z με τα αντίστοιχα $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ του $\boldsymbol{\sigma}(t)$ και το dx με το $x'(t)\,dt$. Ομοίως,

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} Q\,dy = \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\,dt \;\text{ ή }\; \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\,dt$$

και

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} R\,dz = \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\,dt.$$

Άρα το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$ που ορίζεται στις σχέσεις (62) γράφεται και

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} (P\,dx + Q\,dy) \;\text{ ή }\; \int_{\boldsymbol{\sigma}} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Μερικές απλές ιδιότητες.

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} (\kappa\mathbf{f} + \lambda\mathbf{g})\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \kappa\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} + \lambda\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{g}\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$
$$\int_{\boldsymbol{\sigma}\dot{+}\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f}\cdot d(\boldsymbol{\sigma}\dot{+}\boldsymbol{\rho}) = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\rho}.$$

Τρίτη ιδιότητα. *Μετά από αλλαγή παραμέτρου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης μένει αμετάβλητο, αν η αλλαγή παραμέτρου είναι γνησίως αύξουσα, και αλλάζει πρόσημο, αν η αλλαγή παραμέτρου είναι γνησίως φθίνουσα.* Δηλαδή,

$$\int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\rho} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \qquad \text{αν οι } \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma} \text{ έχουν ίδια φορά,}$$
$$\int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\rho} = -\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \qquad \text{αν οι } \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma} \text{ έχουν αντίθετη φορά.}$$

Τέταρτη ιδιότητα. *Αν ισχύει $\|\mathbf{f}(\mathbf{a})\| \le M$ για κάθε σημείο $\mathbf{a}$ στην τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}$, τότε*

$$\left|\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\right| \le MS,$$

όπου S είναι το μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$.

Αποδείξτε εσείς τις τέσσερις ιδιότητες. Μιμηθείτε τις αποδείξεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων του επικαμπυλίου ολοκληρώματος βαθμωτής συνάρτησης.

7η εβδομάδα.

Έστω D ένα χωρίο του $\mathbb{R}^2$ και μια συνάρτηση

$$\mathbf{\Sigma} : D \to \mathbb{R}^3$$

η οποία είναι συνεχής (ως συνάρτηση δυο μεταβλητών) στο D. Όταν το σημείο (u, v) διατρέχει το σύνολο D το αντίστοιχο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u, v)$ διατρέχει το υποσύνολο $\mathbf{\Sigma}(D)$ του $\mathbb{R}^3$. Η συνάρτηση $\mathbf{\Sigma}$ ονομάζεται **επιφάνεια** στον $\mathbb{R}^3$, το χωρίο D ονομάζεται **παραμετρικό χωρίο** της επιφάνειας και οι μεταβλητές u και v ονομάζονται **παράμετροι** της $\mathbf{\Sigma}$. Το $\mathbf{\Sigma}(D)$ είναι η **τροχιά** της $\mathbf{\Sigma}$.

Όπως στην περίπτωση των καμπυλών, όπου σχολιάσαμε την διάκριση ανάμεσα σε καμπύλη-συνάρτηση και σε καμπύλη-τροχιά, πρέπει να τονίσουμε και εδώ ένα ανάλογο σημείο που μπορεί να προκαλεί σύγχυση. Κάνουμε διάκριση ανάμεσα στην έννοια της επιφάνειας (η οποία είναι μία συνάρτηση) και στην έννοια της τροχιάς της επιφάνειας (το σύνολο τιμών της) που είναι ένα υποσύνολο (σχήμα, αν θέλετε) του χώρου $\mathbb{R}^3$. Όμως, έχουμε συνηθίσει παραδοσιακά να χαρακτηρίζουμε *επιφάνεια* και το σύνολο τιμών της επιφάνειας, δηλαδή το συγκεκριμένο σχήμα στον χώρο. Λόγω συνήθειας η διπλή χρήση της λέξης "επιφάνεια" στα βιβλία είναι αναπόφευκτη και θα πρέπει κάθε φορά να ξεχωρίζουμε από τα συμφραζόμενα αν αναφερόμαστε σε επιφάνεια-συνάρτηση ή σε επιφάνεια-τροχιά.

Αν

$$\mathbf{\Sigma}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big), \qquad (u, v) \in D,$$

τότε οι συντεταγμένες συναρτήσεις $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ είναι συνεχείς στο χωρίο D. Αν οι συντεταγμένες συναρτήσεις έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς u, v στο D, τότε η συνάρτηση $\mathbf{\Sigma}$ είναι παραγωγίσμη και οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u, v) = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\Big)$$
$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u, v) = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\Big)$$

είναι συνεχείς στο D. Τότε η επιφάνεια ονομάζεται **λεία** ή **ομαλή**.

Όταν το v είναι σταθερό και μεταβάλλεται το u, τότε το σημείο (u, v) κινείται οριζοντίως μέσα στο χωρίο D και το αντίστοιχο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u, v)$ κινείται πάνω στο σύνολο $\mathbf{\Sigma}(D)$. Η συνάρτηση $\mathbf{\Sigma}(u, v)$, ως συνάρτηση του u (με σταθερό v), είναι συνεχής συνάρτηση *μίας* μεταβλητής και άρα αποτελεί καμπύλη, την οποία αποκαλούμε *u-καμπύλη*. Η τροχιά αυτής της u-καμπύλης περιέχεται στο σύνολο $\mathbf{\Sigma}(D)$. Κάθε τιμή του v μέσα σε κάποιο διάστημα (την προβολή του χωρίου D στον v-άξονα) καθορίζει μια αντίστοιχη u-καμπύλη. Όταν το v διατρέχει αυτό το διάστημα, οι τροχιές των αντίστοιχων u-καμπυλών "σαρώνουν" το $\mathbf{\Sigma}(D)$. Ομοίως, όταν το u είναι σταθερό και μεταβάλλεται το v, τότε το σημείο (u, v) κινείται κατακόρυφα μέσα στο χωρίο D και το αντίστοιχο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u, v)$ κινείται πάνω στο σύνολο $\mathbf{\Sigma}(D)$. Η συνάρτηση $\mathbf{\Sigma}(u, v)$, ως συνάρτηση του v (με σταθερό u), είναι συνεχής συνάρτηση *μίας* μεταβλητής και άρα αποτελεί καμπύλη, την οποία αποκαλούμε *v-καμπύλη*. Η τροχιά αυτής της v-καμπύλης περιέχεται στο σύνολο $\mathbf{\Sigma}(D)$. Κάθε τιμή του u μέσα σε κάποιο διάστημα (την προβολή του χωρίου D στον u-άξονα) καθορίζει μια αντίστοιχη v-καμπύλη. Όταν το u διατρέχει αυτό το διάστημα, οι τροχιές των αντίστοιχων v-καμπυλών "σαρώνουν" το $\mathbf{\Sigma}(D)$.

Από κάθε σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$ του $\mathbf{\Sigma}(D)$ διέρχεται μια u-καμπύλη (αυτή που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη τιμή του v) και μια v-καμπύλη (αυτή που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη τιμή του u). Στο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$ η u-καμπύλη και η v-καμπύλη έχουν αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα τα

$$\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v), \qquad \frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v).$$

Αυτά τα δυο διανύσματα εφάπτονται στο σύνολο $\mathbf{\Sigma}(D)$ στο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$, οπότε το επίπεδο που παράγεται από αυτά τα δύο διανύσματα, δηλαδή το σύνολο των διανυσμάτων που είναι γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των δυο διανυσμάτων,

$$\kappa\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) + \lambda\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v), \qquad \kappa,\lambda\in\mathbb{R},$$

είναι το *εφαπτόμενο επίπεδο* στο $\mathbf{\Sigma}(D)$ στο ίδιο σημείο.

Τώρα σχηματίζουμε το **βασικό εξωτερικό γινόμενο** των δύο εφαπτόμενων διανυσμάτων:

$$\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v).$$

Αυτό το διάνυσμα είναι κάθετο στα δυο εφαπτόμενα διανύσματα, οπότε είναι κάθετο και σε όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς τους και, επομένως, είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο του $\mathbf{\Sigma}(D)$ στο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$. Αυτό το εκφράζουμε ως εξής: *το βασικό εξωτερικό γινόμενο στο σημείο* $\mathbf{\Sigma}(u,v)$ *είναι κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο αυτό*. Αυτή είναι η πρώτη γεωμετρική σημασία του βασικού εξωτερικού γινομένου και έχει να κάνει με την κατεύθυνσή του. Ας δούμε κάτι ακόμη πάνω στο ίδιο πλαίσιο. Το βασικό εξωτερικό γινόμενο σε κάθε σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$ της S ισούται με

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v) &= \det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\end{bmatrix}\\ &= \det\begin{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\end{bmatrix}\mathbf{i} + \det\begin{bmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\end{bmatrix}\mathbf{j} + \det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{bmatrix}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Τώρα θυμόμαστε το σύμβολο της Ιακωβιανής ορίζουσας του ζεύγους (f,g) δύο συναρτήσεων δύο μεταβλητών $f(u,v)$ και $g(u,v)$:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v}\end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Βάσει αυτού του συμβόλου, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση στην οποία καταλήξαμε στη μορφή:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u,v)\,\mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u,v)\,\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\,\mathbf{k}\\ &= \Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u,v), \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u,v), \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\Big).\end{aligned} \tag{63}$$

(Παρατηρήστε την "κυκλικότητα": $x\to y\to z\to x$.) Αφού το $\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$, τότε τα δύο **μοναδιαία κάθετα διανύσματα** στην επιφάνεια στο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$ είναι τα

$$\mathbf{N}(\mathbf{\Sigma}(u,v)) = \pm\frac{\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)}{\|\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\|}. \tag{64}$$

Η δεύτερη γεωμετρική σημασία του βασικού εξωτερικού γινομένου έχει να κάνει με το μήκος του. Όταν θεωρήσουμε ένα πολύ μικρό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Q στο παραμετρικό χωρίο D με κορυφές τα σημεία (u,v), $(u+\Delta u, v)$, $(u, v+\Delta v)$, $(u+\Delta u, v+\Delta v)$, το οποίο έχει εμβαδό $A(Q) = \Delta u \Delta v$, τότε αυτό απεικονίζεται μέσω της $\mathbf{\Sigma}$ σε ένα πολύ μικρό "περίπου παραλληλόγραμμο" σχήμα $\mathbf{\Sigma}(Q)$ πάνω στην επιφάνεια με κορυφές τα αντίστοιχα σημεία $\mathbf{\Sigma}(u,v)$, $\mathbf{\Sigma}(u+\Delta u, v)$, $\mathbf{\Sigma}(u, v+\Delta v)$, $\mathbf{\Sigma}(u+\Delta u, v+\Delta v)$ το οποίο θα έχει εμβαδό $A(\mathbf{\Sigma}(Q))$ περίπου ίσο με

$$\begin{aligned} &\Big\|\Big(\mathbf{\Sigma}(u+\Delta u, v) - \mathbf{\Sigma}(u,v)\Big) \times \Big(\mathbf{\Sigma}(u, v+\Delta v) - \mathbf{\Sigma}(u,v)\Big)\Big\| \\ &\qquad \approx \Big\|\Big(\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\,\Delta u\Big) \times \Big(\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\,\Delta v\Big)\Big\| = \Big\|\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\| \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

Άρα

$$A(\mathbf{\Sigma}(Q)) \approx \Big\|\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\| A(Q).$$

Επομένως, *το μήκος του βασικού εξωτερικού γινομένου στο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$ δηλώνει τον παράγοντα με τον οποίο πολλαπλασιάζονται τα απειροστά εμβαδά στο σημείο (u,v) του παραμετρικού χωρίου D για να καταλήξουν σε απειροστά εμβαδά στο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$ της επιφάνειας.*

Βάσει των παραπάνω και δουλεύοντας με κατάλληλα αθροίσματα Riemann, βρήκαμε έναν τύπο για το εμβαδόν της επιφάνειας (δηλαδή του σχήματος $\mathbf{\Sigma}(D)$). Θεωρήσαμε ένα πλέγμα από οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες στο uv-επίπεδο οι οποίες διαμερίζουν το παραμετρικό χωρίο D σε πολύ μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα Q. Τότε δημιουργούνται οι αντίστοιχες u-καμπύλες και v-καμπύλες οι τροχιές των οποίων διαμερίζουν την επιφάνεια σε αντίστοιχα πολύ μικρά "περίπου παραλληλόγραμμα" σχήματα $\mathbf{\Sigma}(Q)$. Τότε το εμβαδόν του $\mathbf{\Sigma}(D)$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των $\mathbf{\Sigma}(Q)$ για τα διάφορα μικρά Q στα οποία διαμερίζεται το D, οπότε:

$$A(\mathbf{\Sigma}(D)) = \sum_Q A(\mathbf{\Sigma}(Q)) \approx \sum_Q \Big\|\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\| \Delta u \Delta v.$$

Παίρνοντας όλο και πιο λεπτές διαμερίσεις, το τελευταίο άθροισμα Riemann συγκλίνει στο αντίστοιχο διπλό ολοκλήρωμα και άρα

$$\begin{aligned} A(\mathbf{\Sigma}(D)) &= \iint_D \Big\|\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\|\, du dv \\ &= \iint_D \sqrt{\Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u,v)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u,v)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\Big)^2}\, du dv, \end{aligned} \tag{65}$$

όπου για την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον τύπο (63) για τις συντεταγμένες του $\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)$.

Τώρα θα δούμε ένα σημαντικό γενικό παράδειγμα. Πολλές φορές μία από τις μεταβλητές x, y, z του σημείου (x,y,z) που διατρέχει μια επιφάνεια μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των δύο άλλων μεταβλητών. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το σύνολο των σημείων

$$(x, y, f(x,y))$$

όπου το (x,y) κινείται σε ένα χωρίο D του xy-επιπέδου και η συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ είναι πραγματική και συνεχής στο D. Τότε θεωρούμε τις μεταβλητές x, y ως παραμέτρους, ως παραμετρικό χωρίο θεωρούμε το D και ως επιφάνεια θεωρούμε την συνάρτηση $\mathbf{\Sigma} : D \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\mathbf{\Sigma}(x,y) = (x, y, f(x,y)).$$

Τότε το

$$\mathbf{\Sigma}(D) = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$$

είναι το γράφημα της συνάρτησης f. Αν κάνουμε λίγες πράξεις, χρησιμοποιώντας τον τύπο (63), θα δούμε εύκολα ότι το βασικό εξωτερικό γινόμενο στο σημείο $(x, y, f(x,y))$ γράφεται

$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial y}(x,y) = \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\Big)$$

και τα δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα στο γράφημα της f στο σημείο $(x, y, f(x, y))$, που δίνονται από τον τύπο (64), είναι τα

$$\mathbf{N}(x, y, f(x, y)) = \pm \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), -1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1}}.$$

Τέλος, από την (65) έχουμε ότι το εμβαδόν του γραφήματος της f είναι ίσο με

$$A(\mathbf{\Sigma}(D)) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1}\, dxdy.$$

Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι **σφαιρικές επιφάνειες**. Θεωρούμε μια σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$ με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτίνα $R > 0$. Η εξίσωση της σφαίρας είναι η $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Όπως γνωρίζουμε, μπορούμε να παραμετρικοποιήσουμε τα σημεία της σφαίρας με τις σφαιρικές συντεταγμένες. Αν το (x, y, z) είναι πάνω στην σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας $R > 0$, τότε γράφουμε

$$x = R \cos\theta \sin\phi, \quad y = R \sin\theta \sin\phi, \quad z = R \cos\phi.$$

Οι παράμετροι θ, ϕ είναι οι **σφαιρικές συντεταγμένες** του (x, y, z). (Αν το $\rho = R$ δεν ήταν σταθερό, τότε οι σφαιρικές συνταταγμένες θα ήταν οι ρ, θ, ϕ με $0 < \rho < +\infty$). Οι θ-καμπύλες πάνω στην σφαίρα είναι οι διάφοροι "παράλληλοι" που καθορίζονται από σταθερές τιμές της γωνίας ϕ και οι ϕ-καμπύλες είναι οι διάφοροι "μεσημβρινοί" που καθορίζονται από σταθερές τιμές της γωνίας θ. Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση

$$\mathbf{\Sigma} : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$$

με τύπο

$$\mathbf{\Sigma}(\theta, \phi) = (R \cos\theta \sin\phi, R \sin\theta \sin\phi, R \cos\phi)$$

και τότε το σύνολο τιμών της $\mathbf{\Sigma}$ είναι η επιφάνεια της σφαίρας κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας R. Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $\mathbf{\Sigma}$ σε κάποιο υποσύνολο D του $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$, τότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών της $\mathbf{\Sigma}$ θα είναι κάποιο υποσύνολο της επιφάνειας της σφαίρας.
Τώρα κάνουμε έναν απλό υπολογισμό, πάλι με τον τύπο (63), και βλέπουμε ότι το βασικό εξωτερικό γινόμενο στο σημείο $(x, y, z) = (R \cos\theta \sin\phi, R \sin\theta \sin\phi, R \cos\phi) = \mathbf{\Sigma}(\theta, \phi)$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \theta}(\theta, \phi) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \phi}(\theta, \phi) &= (-R^2 \cos\theta \sin^2\phi, -R^2 \sin\theta \sin^2\phi, -R^2 \sin\phi \cos\phi) \\
&= -R \sin\phi\, (R \cos\theta \sin\phi, R \sin\theta \sin\phi, R \cos\phi) \\
&= -R \sin\phi\, \mathbf{\Sigma}(\theta, \phi) = -R \sin\phi\, (x, y, z).
\end{aligned}$$

Άρα το μήκος του $\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \theta}(\theta, \phi) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \phi}(\theta, \phi)$ ισούται με

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \theta}(\theta, \phi) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right\| = \| - R \sin\phi\, (x, y, z)\| = R \sin\phi\, \|(x, y, z)\| = R^2 \sin\phi$$

και τα δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα στην επιφάνεια της σφαίρας στο σημείο $(x, y, z) = \mathbf{\Sigma}(\theta, \phi)$ είναι τα

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \pm \frac{R \sin\phi\, (x, y, z)}{R^2 \sin\phi} = \pm \frac{(x, y, z)}{R}.$$

Από αυτά, το $\frac{(x,y,z)}{R}$ έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό της σφαίρας και το $-\frac{(x,y,z)}{R}$ έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σφαίρας.
Αν $S = \mathbf{\Sigma}(D)$ είναι το τμήμα της σφαίρας το οποίο προκύπτει από ένα υποσύνολο D του $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$, τότε, βάσει της (65), το εμβαδόν του S δίνεται από τον τύπο

$$A(S) = A(\mathbf{\Sigma}(D)) = R^2 \iint_D \sin\phi\, d\theta d\phi.$$

8η εβδομάδα.

Ένα τρίτο παράδειγμα είναι οι **κυλινδρικές επιφάνειες**. Έστω ένας κύλινδρος στον $\mathbb{R}^3$ με τον z-άξονα ως άξονα συμμετρίας του και ακτίνα $R > 0$. Η εξίσωση του κυλίνδρου είναι η $x^2+y^2 = R^2$. Παραμετρικοποιούμε τα σημεία του κυλίνδρου με τις κυλινδρικές συντεταγμένες: αν το (x, y, z) είναι πάνω στον κύλινδρο, γράφουμε

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta, \quad z = z.$$

Οι παράμετροι θ, z είναι οι **κυλινδρικές συντεταγμένες** του (x, y, z). (Αν το $r = R$ δεν ήταν σταθερό, τότε οι κυλινδρικές συντεταγμένες θα ήταν οι r, θ, z με $0 < r < +\infty$). Οι θ-καμπύλες πάνω στον κύλινδρο είναι οι διάφοροι "παράλληλοι" κύκλοι που καθορίζονται από σταθερές τιμές του ύψους z και οι z-καμπύλες είναι οι διάφορες κατακόρυφες ευθείες του κυλίνδρου που καθορίζονται από σταθερές τιμές της γωνίας θ. Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση

$$\mathbf{\Sigma} : [0, 2\pi] \times (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^3$$

με τύπο

$$\mathbf{\Sigma}(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$$

και τότε το σύνολο τιμών της $\mathbf{\Sigma}$ είναι ο κύλινδρος με τον z-άξονα ως άξονα συμμετρίας και ακτίνα R. Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $\mathbf{\Sigma}$ σε κάποιο υποσύνολο D του $[0, 2\pi] \times (-\infty, +\infty)$, τότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών της $\mathbf{\Sigma}$ θα είναι κάποιο υποσύνολο του κυλίνδρου, δηλαδή μία κυλινδρική επιφάνεια.

Τώρα κάνουμε έναν απλό υπολογισμό, πάλι με τον τύπο (63), και βλέπουμε ότι το βασικό εξωτερικό γινόμενο στο σημείο $(x, y, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z) = \mathbf{\Sigma}(\theta, z)$ είναι ίσο με

$$\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\theta}(\theta, z) \times \frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial z}(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0) = (x, y, 0).$$

Άρα το μήκος του $\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\theta}(\theta, z) \times \frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial z}(\theta, z)$ ισούται με

$$\left\|\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\theta}(\theta, z) \times \frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial z}(\theta, z)\right\| = \|(x, y, 0)\| = R$$

και τα δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα στην επιφάνεια της σφαίρας στο σημείο $(x, y, z) = \mathbf{\Sigma}(\theta, z)$ είναι τα

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \pm\frac{(x, y, 0)}{R}.$$

Από αυτά, το $\frac{(x,y,0)}{R}$ έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κυλίνδρου και το $-\frac{(x,y,0)}{R}$ έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό του κυλίνδρου.

Αν $S = \mathbf{\Sigma}(D)$ είναι το τμήμα του κυλίνδρου το οποίο προκύπτει από ένα υποσύνολο D του $[0, 2\pi] \times (-\infty, +\infty)$, τότε, βάσει της (65), το εμβαδόν του S δίνεται από τον τύπο

$$A(S) = A(\mathbf{\Sigma}(D)) = R\iint_D d\theta dz = R\,A(D).$$

Τώρα θα δούμε τρία παραδείγματα: ένα γράφημα συνάρτησης, μια σφαιρική επιφάνεια και μια κυλινδρική επιφάνεια.

Θεωρούμε την επιφάνεια S που ορίζεται από τις σχέσεις $x + y + z = 1$ και $x^2 + 2y^2 \leq 1$. Παρατηρούμε ότι η δεύτερη σχέση καθορίζει ένα χωρίο D στο xy-επίπεδο και η δεύτερη σχέση εκφράζει το z ως συνάρτηση των x, y όταν $(x, y) \in D$: $z = 1 - x - y$. Άρα, αν ορίσουμε την συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = 1 - x - y$, τότε η επιφάνεια S είναι το γράφημα της f:

$$S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + 2y^2 \leq 1, x + y + z = 1\} = \{(x, y, f(x, y)) \,|\, (x, y) \in D\}.$$

Άρα το εμβαδόν της S ισούται με

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1}\; dxdy = \sqrt{3} \iint_D dxdy = \sqrt{3}\, A(D).$$

Για να βρούμε το εμβαδόν της έλλειψης D μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες. Γράφουμε

$$x = r\cos\theta, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\theta$$

και τότε η σχέση $x^2 + 2y^2 \leq 1$ μετασχηματίζεται στην σχέση

$$r \leq 1.$$

Άρα το χωρίο D στο xy-επίπεδο αντιστοιχεί στο χωρίο $E = \{(r, \theta) \,|\, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ στο $r\theta$-επίπεδο. Η Ιακωβιανή ορίζουσα της αλλαγής συντεταγμένων που θεωρήσαμε είναι ίση με

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} r\cos\theta \end{bmatrix} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} A(D) = \sqrt{3} \iint_D dxdy &= \sqrt{\frac{3}{2}} \iint_E r\, drd\theta = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) r\, dr \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\, 2\pi \int_0^1 r\, dr = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \pi. \end{aligned}$$

Τέλος, $A(S) = \sqrt{3}\, A(D) = 3\pi/\sqrt{2}$.

Δεύτερο παράδειγμα: θα υπολογίσουμε το εμβαδόν (ολόκληρης) σφαίρας S ακτίνας $R > 0$. Επειδή το εμβαδόν της σφαίρας είναι ανεξάρτητο του κέντρου της, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σφαίρα έχει κέντρο το $(0, 0, 0)$. Χρησιμοποιούμε, όπως είπαμε, σφαιρικές συντεταγμένες: $x = R\cos\theta\sin\phi$, $y = R\sin\theta\sin\phi$, $z = R\cos\phi$. Επειδή θεωρούμε ολόκληρη την σφαίρα, το παραμετρικό χωρίο είναι το

$$D = \{(\theta, \phi) \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\} = [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

Άρα

$$A(S) = R^2 \iint_D \sin\phi\, d\theta d\phi = R^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi\right) d\theta = 4\pi R^2.$$

Τρίτο παράδειγμα: θα βρούμε το εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας S που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 = R^2$ και $a \leq z \leq b$. Η S είναι το μέρος του κυλίνδρου με άξονα συμμετρίας τον z-άξονα και ακτίνα R που βρίσκεται ανάμεσα στα ύψη $z = a$ και $z = b$. Χρησιμοποιούμε κυνδρικές συντεταγμένες: $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $z = z$. Τότε η επιφάνεια S αντιστοιχεί στο χωρίο

$$D = \{(\theta, z) \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi, a \leq z \leq b\} = [0, 2\pi] \times [a, b]$$

του θz-επιπέδου και, όπως είπαμε,

$$A(S) = R\,A(D) = 2\pi(b-a).$$

Στη συνέχεια θα δούμε τις έννοιες του επιφανειακού ολοκληρώματος βαθμωτής και διανυσματικής συνάρτησης.

Θεωρούμε επιφάνεια

$$\mathbf{\Sigma} : D \to \mathbb{R}^3,$$

όπου D είναι ένα χωρίο του uv-επιπέδου, και βαθμωτή συνάρτηση

$$f : \mathbf{\Sigma}(D) \to \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε το **επιφανειακό ολοκλήρωμα της βαθμωτής συνάρτησης** f **πάνω στην επιφάνεια** $\mathbf{\Sigma}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{\Sigma}} f\,dA &= \iint_D f(\mathbf{\Sigma}(u,v))\Big\|\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\|\,dudv\\ &= \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\\ &\quad\sqrt{\Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u,v)\Big)^2+\Big(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u,v)\Big)^2+\Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\Big)^2}\,dudv.\end{aligned} \tag{66}$$

Το $\iint_{\mathbf{\Sigma}} f\,dA$ είναι το σύμβολο του επιφανειακού ολοκληρώματος της f πάνω στην επιφάνεια $\mathbf{\Sigma}$.

Παρατηρούμε ότι η φορμαλιστική ισότητα

$$dA = \Big\|\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\|\,dudv, \tag{67}$$

η οποία εμφανίζεται στην πρώτη ισότητα στον παραπάνω ορισμό (ανάμεσα στο οριζόμενο ολοκλήρωμα στην $\mathbf{\Sigma}$ και στο δεύτερο ολοκλήρωμα στο D), εκφράζει την σχέση ανάμεσα στο στοιχειώδες εμβαδόν dA της επιφάνειας στο σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$ και στο στοιχειώδες εμβαδόν $dudv$ του παραμετρικού χωρίου D στο αντίστοιχο σημείο (u,v). Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathbf{\Sigma}} f\,dA$ λέμε ότι *ολοκληρώνουμε τις τιμές της f στην επιφάνεια $\mathbf{\Sigma}$ ως προς το στοιχειώδες εμβαδόν dA*.

Ένα παράδειγμα. Θα ολοκληρώσουμε την συνάρτηση με τύπο $f(x,y,z) = x+y$ στην σφαίρα κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R > 0$. Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες για την παραμετρικοποίηση της σφαίρας, οπότε έχουμε την $\mathbf{\Sigma} : D \to \mathbb{R}^3$, όπου το παραμετρικό χωρίο είναι το $D = [0,2\pi]\times[0,\pi]$ και ο τύπος της $\mathbf{\Sigma}$ είναι ο

$$\mathbf{\Sigma}(\theta,\phi) = (R\cos\theta\sin\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\phi).$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\Big\|\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\theta}(\theta,\phi)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\phi}(\theta,\phi)\Big\| = R^2\sin\phi,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{\Sigma}} f\,dA &= \iint_D f(R\cos\theta\sin\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\phi)R^2\sin\phi\,d\theta d\phi\\ &= R^2\iint_D (R\cos\theta\sin\phi + R\sin\theta\sin\phi)\sin\phi\,d\theta d\phi\\ &= R^3\int_0^{\pi}\Big(\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\Big)\sin^2\phi\,d\phi = 0.\end{aligned}$$

Μερικές ιδιότητες. Πρώτη:

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}} (\kappa f + \lambda g)\, dA = \kappa \iint_{\mathbf{\Sigma}} f\, dA + \lambda \iint_{\mathbf{\Sigma}} g\, dA.$$

Δεύτερη: *Αν ισχύει* $|f(\mathbf{a})| \leq M$ *για κάθε σημείο* $\mathbf{a}$ *στην τροχιά της* $\mathbf{\Sigma}$*, τότε*

$$\Big| \iint_{\mathbf{\Sigma}} f\, dA \Big| \leq MA,$$

όπου A *είναι το εμβαδόν της* $\mathbf{\Sigma}$.

Φυσικά, *όταν ολοκληρώνουμε την σταθερή συνάρτηση* 1 *σε μια επιφάνεια* $\mathbf{\Sigma}$*, τότε το αποτέλεσμα είναι το εμβαδόν της επιφάνειας*:

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}} 1\, dA = \iint_D \Big\| \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v) \Big\| dudv = A(\mathbf{\Sigma}(D)) = A.$$

Τώρα ορίζουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης. Θεωρούμε επιφάνεια

$$\mathbf{\Sigma} : D \to \mathbb{R}^3,$$

όπου D είναι ένα χωρίο του uv-επιπέδου, και διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{f} : \mathbf{\Sigma}(D) \to \mathbb{R}^3.$$

Ορίζουμε το **επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης** f **πάνω στην επιφάνεια** $\mathbf{\Sigma}$ ως εξής:

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{\Sigma}(u,v)) \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v) \Big) dudv \tag{68}$$

Το $\iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{\Sigma}$ είναι το σύμβολο του επιφανειακού ολοκληρώματος της f πάνω στην επιφάνεια $\mathbf{\Sigma}$.

Παράδειγμα. Θα ολοκληρώσουμε την συνάρτηση με τύπο $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z)$ στην σφαίρα κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R > 0$. Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες για την παραμετρικοποίηση της σφαίρας, οπότε έχουμε την $\mathbf{\Sigma} : D \to \mathbb{R}^3$, όπου το παραμετρικό χωρίο είναι το $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ και ο τύπος της $\mathbf{\Sigma}$ είναι ο

$$\mathbf{\Sigma}(\theta, \phi) = (R\cos\theta \sin\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\phi).$$

Χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο

$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \theta}(\theta,\phi) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \phi}(\theta,\phi) = -R\sin\phi\,(x,y,z)$$

και τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{\Sigma}(\theta,\phi)) \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \theta}(\theta,\phi) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \phi}(\theta,\phi) \Big) &= \mathbf{f}(x,y,z) \cdot \Big(-R\sin\phi\,(x,y,z) \Big) \\ = (x,y,z) \cdot \Big(-R\sin\phi\,(x,y,z) \Big) &= -R\sin\phi \Big((x,y,z) \cdot (x,y,z) \Big) = -R^3 \sin\phi.\end{aligned}$$

Άρα

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{\Sigma} = -R^3 \iint_D \sin\phi\, d\theta d\phi = -R^3 \int_0^{\pi} \Big(\int_0^{2\pi} d\theta \Big) \sin\phi\, d\phi = -4\pi R^3.$$

Μερικές ιδιότητες. Πρώτη:

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}} (\kappa \mathbf{f} + \lambda \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{\Sigma} = \kappa \iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{\Sigma} + \lambda \iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{\Sigma}.$$

Δεύτερη: *Αν ισχύει* $\|\mathbf{f}(\mathbf{a})\| \leq M$ *για κάθε σημείο* $\mathbf{a}$ *στην τροχιά της* $\mathbf{\Sigma}$*, τότε*

$$\Big|\iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{\Sigma}\Big| \leq MA,$$

όπου A *είναι το εμβαδόν της* $\mathbf{\Sigma}$.

Τώρα θα δούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα *διανυσματικής* συνάρτησης στη μορφή επιφανειακού ολοκληρώματος *βαθμωτής* συνάρτησης. Έχουμε δει ότι σε οποιοδήποτε σημείο $\mathbf{\Sigma}(u,v)$ της τροχιάς της $\mathbf{\Sigma}$ το διάνυσμα

$$\mathbf{N}(\mathbf{\Sigma}(u,v)) = \frac{\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)}{\|\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\|}$$

είναι *μοναδιαίο* κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Τότε έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v) = \mathbf{N}(\mathbf{\Sigma}(u,v)) \Big\|\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\|$$

και άρα το επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματκής $\mathbf{f}$ γράφεται, βάσει της (68),

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \iint_{D} \mathbf{f}(\mathbf{\Sigma}(u,v)) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{\Sigma}(u,v)) \Big\|\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\| \, dudv. \tag{69}$$

Τώρα, αν ορίσουμε την *βαθμωτή* συνάρτηση $\mathbf{f} \cdot \mathbf{N} : \mathbf{\Sigma}(D) \to \mathbb{R}$ ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσματικών συναρτήσεων $\mathbf{f} : \mathbf{\Sigma}(D) \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{N} : \mathbf{\Sigma}(D) \to \mathbb{R}$, δηλαδή με τύπο $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{N})(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{a})$ για κάθε σημείο $\mathbf{a} = \mathbf{\Sigma}(u,v)$ της τροχιάς της $\mathbf{\Sigma}$, τότε από την (69) έχουμε ότι

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \iint_{D} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{N})(\mathbf{\Sigma}(u,v)) \Big\|\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\| \, dudv = \iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, dA, \tag{70}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον τύπο (66) βάσει του οποίου ορίζεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, dA$ της βαθμωτής συνάρτησης $\mathbf{f} \cdot \mathbf{N}$. Άρα *το επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματικής* $\mathbf{f}$ *ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα της βαθμωτής* $\mathbf{f} \cdot \mathbf{N}$.

Παρατηρούμε την φορμαλιστική ισότητα $d\mathbf{\Sigma} = \mathbf{N} \, dA$ που εμφανίζεται να συνδέει τα δύο άκρα της (70). Αυτή αιτιολογείται μέσω της άλλης φορμαλιστικής ισότητας (67). Πράγματι,

$$d\mathbf{\Sigma} = \Big(\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big) dudv = \mathbf{N}(\mathbf{\Sigma}(u,v)) \Big\|\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\| \, dudv = \mathbf{N} \, dA,$$

όπου την πρώτη φορμαλιστική ισότητα την βλέπουμε στον τύπο (68) και όπου απλοποιούμε το $\mathbf{N}(\mathbf{\Sigma}(u,v))$ σε $\mathbf{N}$.

Τώρα, η βαθμωτή συνάρτηση $\mathbf{f} \cdot \mathbf{N}$ είναι η προσημασμένη προβολή της διανυσματικής $\mathbf{f}$ πάνω στις κάθετες της τροχιάς της $\mathbf{\Sigma}$. Άρα μπορούμε να πούμε ότι *το επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματικής* $\mathbf{f}$ *στην επιφάνεια* $\mathbf{\Sigma}$ *είναι ίσο με το ολοκλήρωμα των προσημασμένων προβολών της* $\mathbf{f}$ *πάνω στις κάθετες της τροχιάς της* $\mathbf{\Sigma}$ *ως προς το στοιχειώδες εμβαδόν.*

9η εβδομάδα.

Τώρα θα γράψουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης με μια δεύτερη συμβολική μορφή, εκτός της $\iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{\Sigma}$. Γράφουμε την $\mathbf{f}$ με τις συντεταγμένες συναρτήσεις της,

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

καθώς και την επιφάνεια $\mathbf{\Sigma}$ με τις συντεταγμένες συναρτήσεις της,

$$\mathbf{\Sigma}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Τότε έχουμε την σύνθεση

$$\begin{aligned}&\mathbf{f}(\mathbf{\Sigma}(u,v))\\ &= (P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)), Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v)), R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))).\end{aligned}$$

Κατόπιν χρησιμοποιούμε τον τύπο (63) που αναφέρει τις συντεταγμένες του εξωτερικού γινομένου

$$\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v) = \Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u,v), \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u,v), \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\Big),$$

γράφουμε τον τύπο που ορίζει το επιφανειακό ολοκλήρωμα και κάνουμε πράξεις:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{\Sigma} &= \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{\Sigma}(u,v))\cdot\Big(\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big)\,dudv\\ &= \iint_D \Big(P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u,v)\\ &\quad + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u,v)\\ &\quad + R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\Big)\,dudv.\end{aligned} \tag{71}$$

Τώρα εισάγουμε μια συμβολική ισότητα:

$$df\wedge dg = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\,dudv, \tag{72}$$

όπου $f = f(u,v)$ και $g = g(u,v)$ είναι συναρτήσεις των u,v. Βάσει αυτής της ισότητας, θα αντικαταστήσουμε τα γινόμενα $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u,v)\,dudv$, $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u,v)\,dudv$ και $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\,dudv$ με τα σύμβολα $dy\wedge dz$, $dz\wedge dx$ και $dx\wedge dy$ και θα συμβολίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα της (71) με το σύμβολο

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}}\Big(P(x,y,z)\,dy\wedge dz + Q(x,y,z)\,dz\wedge dx + R(x,y,z)\,dx\wedge dy\Big).$$

Άρα, σύμφωνα με την (71), έχουμε δύο σύμβολα για το επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{\Sigma} &= \iint_{\mathbf{\Sigma}}\Big(P(x,y,z)\,dy\wedge dz + Q(x,y,z)\,dz\wedge dx + R(x,y,z)\,dx\wedge dy\Big)\\ &\quad \text{(ή, πιο λιτά,)}\\ &= \iint_{\mathbf{\Sigma}}(P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy).\end{aligned} \tag{73}$$

Αυτό μας θυμίζει τα δύο σύμβολα για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης:

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \Big(P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\Big) = \int_{\boldsymbol{\sigma}} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Αν οι P, Q, R είναι συναρτήσεις των x, y, z, τότε η συμβολική παράσταση

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

ονομάζεται **διαφορική μορφή πρώτης τάξης**, ενώ η συμβολική παράσταση

$$P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$$

ονομάζεται **διαφορική μορφή δεύτερης τάξης**.

Σχόλιο. Από ιδιότητες οριζουσών έχουμε:

$$\frac{\partial(g,f)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v}\end{bmatrix} = -\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$$

και άρα, βάσει της (72), έχουμε

$$dg\wedge df = -df\wedge dg.$$

Δηλαδή, η “πράξη” $df\wedge dg$ δεν είναι μεταθετική.

Μάθαμε στα προηγούμενα μαθήματα ότι, για να ολοκληρώσουμε μια διαφορική μορφή πρώτης τάξης $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ σε μια καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, αντικαθιστούμε τις μεταβλητές x, y, z των P, Q, R με τις συντεταμένες συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ της καμπύλης, αντικαθιστούμε τα dx, dy, dz με τα $x'(t)\,dt$, $y'(t)\,dt$, $z'(t)\,dt$ και ολοκληρώνουμε ως προς το t στο παραμετρικό διάστημα $[a,b]$ της καμπύλης:

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int_a^b &\Big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) \\ &+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\Big)\,dt.\end{aligned}$$

Ακριβώς ανάλογα λειτουργούμε για να ολοκληρώσουμε μια διαφορική μορφή δεύτερης τάξης $P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$ σε μια επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Αντικαθιστούμε τις μεταβλητές x, y, z των P, Q, R με τις συντεταμένες συναρτήσεις $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ της επιφάνειας, αντικαθιστούμε τα $dy\wedge dz$, $dz\wedge dx$, $dx\wedge dy$ με τα $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,dudv$, $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,dudv$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv$ και ολοκληρώνουμε ως προς τα u, v στο παραμετρικό χωρίο D της επιφάνειας:

$$\begin{aligned}&\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy) \\ &\quad= \iint_D \Big(P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u,v) \\ &\qquad + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u,v) \\ &\qquad + R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\Big)dudv.\end{aligned}$$

Ένα παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy)$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$. Χρησιμοποιούμε την γνωστή παραμετρικοποίηση της μοναδιαίας σφαίρας,

$$x = \cos\theta\sin\phi, \quad y = \sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\phi,$$

με το παραμετρικό χωρίο $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Τότε

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} = -\cos\theta\sin^2\phi, \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} = -\sin\theta\sin^2\phi, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = -\sin\phi\cos\phi.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy) &= \iint_D \Big((\cos\theta\sin\phi)(-\cos\theta\sin^2\phi) \\ &\quad + (\sin\theta\sin\phi)(-\sin\theta\sin^2\phi) + (\cos\phi)(-\sin\phi\cos\phi)\Big)\, d\theta d\phi \\ &= -\iint_D \sin\phi\, d\theta d\phi = -\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}\sin\phi\, d\phi\Big) d\theta = -4\pi.\end{aligned}$$

Τώρα θα μελετήσουμε την έννοια της *αναπαραμετρικοποίησης μιας επιφάνειας*. Θεωρούμε μια επιφάνεια

$$\boldsymbol{\Sigma} : D \to \mathbb{R}^3$$

όπου D είναι το παραμετρικό χωρίο της επιφάνειας στο uv-επίπεδο. Θεωρούμε και μια συνάρτηση

$$\mathbf{H} : E \xrightarrow{1-1,\, \text{επί}} D,$$

όπου E είναι ένα νέο παραμετρικό χωρίο στο pq-επίπεδο. Η συνάρτηση $\mathbf{H}$ παίζει τον ρόλο της **αλλαγής παραμέτρων** από u, v σε p, q.

Τώρα παίρνουμε την σύνθετη συνάρτηση

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\Sigma} \circ \mathbf{H} : E \to \mathbb{R}^3.$$

Αυτή είναι μια νέα επιφάνεια με παραμετρικό χωρίο το E στο pq-επίπεδο.

Είναι εύκολο να δούμε ότι οι $\boldsymbol{\Sigma}$ και $\mathbf{P}$ έχουν το ίδιο σύνολο τιμών στον xyz-χώρο $\mathbb{R}^3$. Αυτός που μπορεί ίσως να είναι διαφορετικός είναι ο *προσανατολισμός* των δύο επιφανειών. Για να το δούμε αυτό, πρέπει πρώτα να ορίσουμε τον προσανατολισμό μιας επιφάνειας. Ας θυμηθούμε ότι όταν έχουμε μια καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}(t)$, τότε ο προσανατολισμός της καμπύλης, δηλαδή η φορά διαγραφής της καμπύλης, καθορίζεται από τις κατευθύνσεις των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\boldsymbol{\sigma}'(t) = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}(t)$. Όταν αναπαραμετρικοποιούμε μια καμπύλη μέσω μιας αλλαγής παραμέτρου h, τότε η κατευθύνσεις των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\boldsymbol{\rho}'(u) = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{du}(u)$ της νέας καμπύλης $\boldsymbol{\rho}(u) = \boldsymbol{\sigma} \circ h(u)$ διατηρούνται ίδιες, αν $h'(u) > 0$, ή αλλάζουν, αν $h'(u) < 0$. Αυτό, όπως είδαμε, προκύπτει από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{du}(u) = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}(t)\,\frac{dh}{du}(u) \qquad (t = h(u)). \tag{74}$$

Στην περίπτωση μιας επιφάνειας $\boldsymbol{\Sigma}(u, v)$, αυτό που θα καθορίσει τον προσανατολισμό της είναι οι κατευθύνσεις των κάθετων διανυσμάτων

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v).$$

Οπότε θα δούμε ποιός τύπος, ανάλογος του (74), συσχετίζει τα κάθετα διανύσματα $\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v)$ της $\boldsymbol{\Sigma}$ με τα κάθετα διανύσματα $\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial p}(p,q) \times \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial q}(p,q)$ της αναπαραμετρικοποίησης $\mathbf{P}$. Γράφουμε τις συντεταγμένες συναρτήσεις των $\boldsymbol{\Sigma}$, $\mathbf{P}$:

$$\boldsymbol{\Sigma}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad \mathbf{P}(p,q) = (\bar{x}(p,q), \bar{y}(p,q), \bar{z}(p,q)).$$

Γράφουμε και τις συντεταγμένες συναρτήσεις της αλλαγής μεταβλητής:

$$\mathbf{H}(p,q) = (u(p,q), v(p,q)).$$

Από την σχέση $\mathbf{P} = \mathbf{\Sigma} \circ \mathbf{H}$ βλέπουμε εύκολα ότι

$$\bar{x}(p,q) = x(u(p,q), v(p,q)), \quad \bar{y}(p,q) = y(u(p,q), v(p,q)), \quad \bar{z}(p,q) = z(u(p,q), v(p,q)).$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας για πολλές μεταβλητές έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}}{\partial p} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}, & \frac{\partial \bar{x}}{\partial q} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q},\\
\frac{\partial \bar{y}}{\partial p} &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}, & \frac{\partial \bar{y}}{\partial q} &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q},\\
\frac{\partial \bar{z}}{\partial p} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}, & \frac{\partial \bar{z}}{\partial q} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\bar{y},\bar{z})}{\partial(p,q)} &= \frac{\partial \bar{y}}{\partial p}\frac{\partial \bar{z}}{\partial q} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial q}\frac{\partial \bar{z}}{\partial p}\\
&= \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}\Big)\Big(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q}\Big) - \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q}\Big)\Big(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}\Big)\\
&= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q}\\
&\quad - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}\\
&= \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}\\
&= \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}\Big) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}.
\end{aligned}$$

Αποδείξαμε την πρώτη από τις επόμενες τρεις σχέσεις. Οι άλλες δύο αποδεικνύονται εντελώς όμοια.

$$\frac{\partial(\bar{y},\bar{z})}{\partial(p,q)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}, \quad \frac{\partial(\bar{z},\bar{x})}{\partial(p,q)} = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}, \quad \frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(p,q)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}.$$

Όμως, τα αριστερά μέλη αυτών των εξισώσεων είναι οι συντεταγμένες του $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q}$ και οι πρώτοι όροι των δεξιών μελών τους είναι οι συντεταγμένες του $\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}$. Επίσης ο αριθμός $\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}$ είναι κοινός παράγων των δεξιών μελών και άρα έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q} = \Big(\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial v}\Big)\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}. \tag{75}$$

Ο αριθμός $\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα της αλλαγής μεταβλητής $\mathbf{H} : E \to D$. Επομένως καταλήγουμε στον εξής κανόνα.

Αν για κάθε $(p,q) \in E$ ισχύει $\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}(p,q) > 0$, τότε τα κάθετα διανύσματα της επιφάνειας $\mathbf{P}$ έχουν ίδια κατεύθυνση με τα κάθετα διανύσματα της επιφάνειας $\mathbf{\Sigma}$ και άρα οι δύο επιφάνειες έχουν ίδιο προσανατολισμό. Ενώ, αν για κάθε $(p,q) \in E$ ισχύει $\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}(p,q) < 0$, τότε τα κάθετα διανύσματα της επιφάνειας $\mathbf{P}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση με τα κάθετα διανύσματα της επιφάνειας $\mathbf{\Sigma}$ και άρα οι δύο επιφάνειες έχουν αντίθετο προσανατολισμό.

Τώρα θα δούμε την επίδραση μιας αλλαγής παραμέτρου στο επιφανειακό ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης. Χρησιμοποιούμε τον τύπο (6) και τον τύπο αλλαγής μεταβλητής για διπλά ολοκληρώματα, καθώς και τον τύπο (75):

$$\begin{aligned}
\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} f\, dA &= \iint_D f(\boldsymbol{\Sigma}(u,v))\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\|\, dudv\\
&= \iint_E f(\mathbf{P}(p,q))\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big\|\Big|\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\Big|\, dpdq\\
&= \iint_E f(\mathbf{P}(p,q))\Big\|\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big)\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\Big\|\, dpdq\\
&= \iint_E f(\mathbf{P}(p,q))\Big\|\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p}(p,q)\times\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q}(p,q)\Big\|\, dpdq = \iint_{\mathbf{P}} f\, dA.
\end{aligned}$$

Επομένως,

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης παραμένει αμετάβλητο όταν αναπαραμετρικοποιηθεί η επιφάνεια.

Παίρνοντας ως ειδική περίπτωση την σταθερή συνάρτηση $f = 1$, βλέπουμε ότι *το εμβαδόν μιας επιφάνειας παραμένει αμετάβλητο όταν αναπαραμετρικοποιηθεί η επιφάνεια.*

Θα δούμε τώρα την περίπτωση επιφανειακού ολοκληρώματος διανυσματικής συνάρτησης. Στον παρακάτω υπολογισμό θα γράψουμε $|\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}| = +\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}$ αν $\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)} > 0$ ενώ $|\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}| = -\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}$ αν $\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)} < 0$.

$$\begin{aligned}
\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} &= \iint_D \mathbf{f}(\boldsymbol{\Sigma}(u,v))\cdot\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big) dudv\\
&= \iint_E \mathbf{f}(\mathbf{P}(p,q))\cdot\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big)\Big|\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\Big|\, dpdq\\
&= \pm\iint_E \mathbf{f}(\mathbf{P}(p,q))\cdot\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big)\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\, dpdq\\
&= \pm\iint_E \mathbf{f}(\mathbf{P}(p,q))\cdot\Big(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p}(p,q)\times\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q}(p,q)\Big) dpdq = \pm\iint_{\mathbf{P}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{P}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

Όταν αναπαραμετρικοποιηθεί η επιφάνεια, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης παραμένει αμετάβλητο αν διατηρηθεί ο προσανατολισμός της επιφάνειας, ενώ αλλάζει πρόσημο αν αλλάξει ο προσανατολισμός της επιφάνειας.

Ας ξαναδούμε το τελευταίο παράδειγμα του επιφανειακού ολοκληρώματος $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(x\, dy\wedge dz + y\, dz\wedge dx + z\, dx\wedge dy)$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$ αλλά με μια διαφορετική παραμετρικοποίηση από την συνηθισμένη. Αν θεωρήσουμε την συνηθισμένη παραμετρικοποίηση με τύπο

$$x = \cos\theta\sin\phi, \quad y = \sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\phi$$

στο παραμετρικό χωρίο $D = [0, 2\pi]\times[0,\pi]$, είδαμε προηγουμένως ότι

$$\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(x\, dy\wedge dz + y\, dz\wedge dx + z\, dx\wedge dy) = -4\pi.$$

Με *αυτήν* την παραμετρικοποίηση το κάθετο διάνυσμα στο σημείο (x,y,z) της επιφάνειας είναι το

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \theta}(\theta,\phi)\times\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \phi}(\theta,\phi) = (-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\sin\phi\cos\phi) = -\sin\phi\,(x,y,z)$$

και, επειδή $-\sin\phi < 0$, το κάθετο διάνυσμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από το (x,y,z) και άρα κατευθύνεται προς το κέντρο της σφαίρας.

Ας πάρουμε τώρα την παραμετρικοποίηση με τύπο

$$x = \cos\theta\sin\phi, \quad y = -\sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\phi$$

στο παραμετρικό χωρίο $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Τότε το κάθετο διάνυσμα στο σημείο (x, y, z) της επιφάνειας είναι, μετά από πράξεις, το

$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \theta}(\theta, \phi) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \phi}(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin^2\phi, \sin\theta \sin^2\phi, \sin\phi\cos\phi) = \sin\phi\,(x, y, z).$$

Επειδή $\sin\phi > 0$, το κάθετο διάνυσμα έχει την ίδια κατεύθυνση με το (x, y, z) και άρα κατευθύνεται προς το εξωτερικό της σφαίρας. Τώρα δεν χρειάζεται να κάνουμε πράξεις για να υπολογίσουμε το $\iint_{\mathbf{\Sigma}}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$ με την νέα $\mathbf{\Sigma}$. Απλώς θα σκεφτούμε ότι οι δύο παραμετρικοποιήσεις επάγουν αντίθετους προσανατολισμούς στην μοναδιαία σφαίρα και άρα τα επιφανειακά ολοκληρώματα θα είναι αντίθετα. Επομένως, με την νέα παραμετρικοποίηση έχουμε

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy) = 4\pi.$$

Τώρα πάμε στο πρώτο από τα λεγόμενα **ολοκληρωτικά θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης**, το *θεώρημα του Green*.

Πρώτα θα ξεκαθαρίσουμε τί εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνοριακή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ ενός χωρίου D έχει την **θετική** ή την **αρνητική φορά διαγραφής σε σχέση με το** D: *όταν περπατάμε πάνω στην καμπύλη με τη φορά διαγραφής της και το αριστερό μας χέρι δείχνει προς το εσωτερικό του D τότε η φορά διαγραφής είναι θετική σε σχέση με το D, ενώ αν το αριστερό μας χέρι δείχνει προς το εξωτερικό του D τότε η φορά διαγραφής είναι αρνητική σε σχέση με το D*. Για παράδειγμα, όταν το D είναι ένα δίσκος και η $\boldsymbol{\sigma}$ διαγράφει τον συνοριακό κύκλο του D, τότε αυτή έχει την *θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το D* όταν έχει την συνηθισμένη θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το κέντρο του κύκλου (την αντι-ωρολογιακή). Όταν το D είναι ένας δακτύλιος και η $\boldsymbol{\sigma}$ διαγράφει τον εξωτερικό συνοριακό κύκλο του D, τότε αυτή έχει την *θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το D* όταν έχει την συνηθισμένη θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το κέντρο του κύκλου (την αντι-ωρολογιακή), ενώ όταν η $\boldsymbol{\sigma}$ διαγράφει τον εσωτερικό συνοριακό κύκλο του D, τότε αυτή έχει την *θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το D* όταν έχει την συνηθισμένη *αρνητική* φορά διαγραφής σε σχέση με το κέντρο του κύκλου (την ωρολογιακή).

Σημείωση. Όταν λέμε ότι "περπατάμε πάνω στην καμπύλη" εννοούμε ότι πατάμε πάνω στο xy-επίπεδο στα σημεία της καμπύλης, ότι είμαστε όρθιοι, δηλαδή παράλληλοι με τον z-άξονα, και το κεφάλι μας δείχνει προς την κατεύθυνση του *θετικού* z-άξονα: με άλλα λόγια, έχουμε την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{k}$. Η παρατήρηση αυτή θα είναι σημαντική όταν θα μιλήσουμε για το θεώρημα του Stokes.

Έστω D ένα χωρίο *πρώτου τύπου* στο xy-επίπεδο και μία πραγματική συνάρτηση P ορισμένη και συνεχής στο D. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση P έχει σε κάθε σημείο του D μερική παράγωγο $\frac{\partial P}{\partial y}$ και ότι κι αυτή είναι συνεχής στο D. Τότε

$$D = \{(x, y)\,|\, a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$$

όπου $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ για $x \in [a, b]$, και

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dy\Big)dx = \int_a^b \Big(P(\phi_2(x)) - P(\phi_1(x))\Big)dx. \qquad (76)$$

Τώρα θεωρούμε την καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ η οποία διαγράφει μία φορά το σύνορο του D με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το D. Τότε η $\boldsymbol{\sigma}$ χωρίζεται σε τέσσερις διαδοχικές καμπύλες: $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ και $\boldsymbol{\sigma}_4$. Η $\boldsymbol{\sigma}_1$ (η κάτω μεριά της $\boldsymbol{\sigma}$) έχει τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}_1(x) = (x, \phi_1(x)), \qquad x \in [a, b],$$

και άρα

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}_1} P(x, y)\,dx = \int_a^b P(x, \phi_1(x))\,\frac{dx}{dx}\,dx = \int_a^b P(x, \phi_1(x))\,dx.$$

Η $\boldsymbol{\sigma}_2$ (η δεξιά μεριά της $\boldsymbol{\sigma}$) έχει τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}_2(y) = (b, y), \qquad y \in [\phi_1(b), \phi_2(b)],$$

και άρα

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}_2} P(x,y)\, dx = \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} P(b,y)\, \frac{db}{dy}\, dy = 0$$

διότι $\frac{db}{dy} = 0$. Η καμπύλη με φορά διαγραφής αντίθετη της φοράς διαγραφής της $\boldsymbol{\sigma}_3$ (της πάνω μεριάς της $\boldsymbol{\sigma}$) έχει τύπο

$$\boldsymbol{\rho}_3(x) = (x, \phi_2(x)), \qquad x \in [a, b],$$

και άρα

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}_3} P(x,y)\, dx = -\int_{\boldsymbol{\rho}_3} P(x,y)\, dx = -\int_a^b P(x, \phi_2(x))\, \frac{dx}{dx}\, dx = -\int_a^b P(x, \phi_2(x))\, dx.$$

Η καμπύλη με φορά διαγραφής αντίθετη της φοράς διαγραφής της $\boldsymbol{\sigma}_4$ (της αριστερής μεριάς της $\boldsymbol{\sigma}$) έχει τύπο

$$\boldsymbol{\rho}_4(y) = (a, y), \qquad y \in [\phi_1(a), \phi_2(a)],$$

και άρα

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}_4} P(x,y)\, dx = -\int_{\boldsymbol{\rho}_4} P(x,y)\, dx = -\int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(a)} P(a,y)\, \frac{da}{dy}\, dy = 0.$$

Προσθέτοντας τα επιμέρους ολοκληρώματα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\sigma}} P(x,y)\, dx &= \int_{\boldsymbol{\sigma}_1} P(x,y)\, dx + \int_{\boldsymbol{\sigma}_2} P(x,y)\, dx + \int_{\boldsymbol{\sigma}_3} P(x,y)\, dx + \int_{\boldsymbol{\sigma}_4} P(x,y)\, dx \\
&= \int_a^b P(x, \phi_1(x))\, dx + 0 - \int_a^b P(x, \phi_2(x))\, dx + 0 \qquad (77)\\
&= \int_a^b \Big(P(x, \phi_1(x)) - P(x, \phi_2(x)) \Big)\, dx.
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις (76) και (77), βλέπουμε ότι

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} P(x,y)\, dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dxdy. \qquad (78)$$

Αυτός ο τύπος είναι μία πρώτη ειδική περίπτωση του τύπου του Green.

Σημείωση. Όταν χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\oint_{\boldsymbol{\sigma}}$ θα εννοούμε ότι η καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ είναι κλειστή, δηλαδή ότι τα δύο άκρα της ταυτίζονται.

Κατόπιν, έστω D ένα χωρίο *δεύτερου τύπου* στο xy-επίπεδο και μία πραγματική συνάρτηση Q ορισμένη και συνεχής στο D. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η Q έχει σε κάθε σημείο του D μερική παράγωγο $\frac{\partial Q}{\partial x}$ και ότι κι αυτή είναι συνεχής στο D. Τότε

$$D = \{(x,y) \,|\, c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

όπου $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ και $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ για $y \in [c, d]$.

Με τον ίδιο τρόπο όπως κάναμε για χωρίο πρώτου τύπου, αποδεικνύεται ότι

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} Q(x,y)\, dxdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\, dxdy. \qquad (79)$$

Και πάλι η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά το σύνορο του D με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το D. Αυτός ο τύπος είναι μια δεύτερη ειδική περίπτωση του τύπου του Green.

Οι δύο τύποι (78) και (79) του Green που είδαμε συνδυάζονται σε ένα τύπο για χωρίο D το οποίο είναι πρώτου *και* δεύτερου τύπου.

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}}\Big(P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\Big)=\iint_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy.$$

Τώρα με ένα απλό τέχνασμα μπορούμε να επεκτείνουμε αυτόν τον τύπο για πολύ γενικότερα χωρία D: εκείνα τα οποία διαμερίζονται σε μικρότερα χωρία τα οποία είναι πρώτου και δεύτερου τύπου. Θεωρούμε, λοιπόν, ένα τέτοιο χωρίο D και έστω ότι αυτό χωρίζεται σε μικρότερα χωρία $D_1,\dots,D_m$, καθένα από τα οποία είναι πρώτου και δεύτερου τύπου. Υποθέτουμε ότι οι συνοριακές καμπύλες τους είναι οι $\boldsymbol{\rho}_1,\dots,\boldsymbol{\rho}_m$ με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με τα αντίστοιχα χωρία. Τέλος, έστω ότι το D έχει συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_k$ με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με το D. Ο τύπος του Green που αποδείξαμε έχει ισχύ για καθένα από τα χωρία $D_1,\dots,D_m$. Δηλαδή

$$\oint_{\boldsymbol{\rho}_l}\Big(P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\Big)=\iint_{D_l}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy,\qquad l=1,\dots,m.$$

Επειδή το άθροισμα των διπλών ολοκληρωμάτων στα $D_1,\dots,D_m$ είναι ίσο με το διπλό ολοκλήρωμα στο D, όταν προσθέσουμε αυτούς τους τύπους θα βρούμε

$$\sum_{l=1}^{m}\oint_{\boldsymbol{\rho}_l}\Big(P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\Big)=\iint_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy. \tag{80}$$

Τώρα παρατηρούμε τα εξής. Οι συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\rho}_1,\dots,\boldsymbol{\rho}_m$ των $D_1,\dots,D_m$ έχουν κάποια μέρη τους τα οποία είναι κοινά με τις συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_k$ του D και κάποια άλλα μέρη τους τα οποία είναι κοινά μεταξύ τους: δηλαδή, αν δύο χωρία D_{l_1} και D_{l_2} συνορεύουν, τότε το κοινό σύνορό τους είναι κοινό μέρος των αντίστοιχων $\boldsymbol{\rho}_{l_1}$ και $\boldsymbol{\rho}_{l_2}$. Μάλιστα, *αυτό το κοινό μέρος έχει αντίθετες φορές διαγραφής: μία θετική σε σχέση με το D_{l_1} και μία θετική σε σχέση με το D_{l_2}*. Τώρα, όταν "σπάσουμε" καθένα από τα $\int_{\boldsymbol{\rho}_l}\big(P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\big)$ σε άθροισμα επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στα διάφορα μέρη της αντίστοιχης $\boldsymbol{\rho}_l$, βλέπουμε ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα στα μέρη που είναι κοινά μεταξύ των διαφόρων $\boldsymbol{\rho}_l$ αλληλοαναιρούνται στο συνολικό άθροισμα στην αριστερή μεριά της (80) διότι έχουν αντίθετα πρόσημα. Έτσι απομένουν μόνο τα επικαμπύλια ολοκληρώματα στα μέρη των $\boldsymbol{\rho}_l$ τα οποία είναι κοινά με τις συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_k$ του D και μάλιστα με τις ίδιες φορές διαγραφής που έχουν ως μέρη των $\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_k$. Το άθροισμα αυτών των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων θα μας δώσει το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στις $\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_k$. Δηλαδή, η (80) θα γίνει

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k}\oint_{\boldsymbol{\sigma}_j}\Big(P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\Big)=\iint_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy.} \tag{81}$$

Αυτός είναι ο **γενικός τύπος του Green** και επαναλαμβάνουμε τις προϋποθέσεις: *το D είναι χωρίο στο xy-επίπεδο, το οποίο μπορεί να χωριστεί σε μικρότερα χωρία καθένα από τα οποία είναι πρώτου και δεύτερου τύπου, οι συναρτήσεις $P=P(x,y)$ και $Q=Q(x,y)$ είναι βαθμωτές συναρτήσεις συνεχείς στο D και με μερικές παραγώγους $\frac{\partial P}{\partial y}$ και $\frac{\partial Q}{\partial x}$ συνεχείς στο D και οι $\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_k$ είναι οι συνοριακές κλειστές καμπύλες του D με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με το D.*

Σε απλούστερη μορφή:

$$\sum_{j=1}^{k}\oint_{\boldsymbol{\sigma}_j}(P\,dx+Q\,dy)=\iint_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy.$$

Πρώτο παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}}(y\,dx-x\,dy)$, όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η συνοριακή καμπύλη του τετραγώνου $D=[-1,1]\times[-1,1]$ με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το D. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η φορά διαγραφής της $\boldsymbol{\sigma}$ ταυτίζεται με την αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Οι συναρτήσεις $P(x,y) = y$ και $Q(x,y) = -x$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ στο D. Τώρα εφαρμόζουμε τον τύπο του Green στο τετράγωνο D και έχουμε

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}}(y\,dx - x\,dy) = \iint_D \Big(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\Big)dxdy = -2\iint_D dxdy = -2A(D) = -8.$$

Δεύτερο παράδειγμα. Θα επαληθεύσουμε το Θεώρημα του Green για τον δίσκο D με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα R και τις συναρτήσεις $P(x,y) = -yx^2$ και $Q(x,y) = xy^2$. Οι συναρτήσεις P και Q έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$ στο D. Η συνοριακή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ του δίσκου D διαγράφει τον κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας R με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το D και άρα σε σχέση με το σημείο $(0,0)$. Η συνηθισμένη παραμετρικοποίηση με αυτήν την φορά διαγραφής έχει τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (R\cos t, R\sin t), \qquad t \in [0,2\pi].$$

Άρα

$$\begin{aligned}\oint_{\boldsymbol{\sigma}}(-yx^2\,dx + xy^2\,dy) &= \int_0^{2\pi}\Big((-R\sin t)(R^2\cos^2 t)(-R\sin t)\\ &\qquad + (R\cos t)(R^2\sin^2 t)(R\cos t)\Big)\,dt \\ &= 2R^4\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{\pi R^4}{2}.\end{aligned} \tag{82}$$

Ο απλούστερος τρόπος να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα στον δίσκο D είναι με αλλαγή από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες: γράφουμε $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, με $0 \le r \le R$ και $0 \le \theta \le 2\pi$ και έχουμε

$$\iint_D \Big(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-yx^2)}{\partial y}\Big)dxdy = \iint_D (y^2 + x^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^R r^3\,dr\Big)d\theta = \frac{\pi R^4}{2}. \tag{83}$$

Από τις (82) και (83) επαληθεύεται ο τύπος του Green:

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}}(-yx^2\,dx + xy^2\,dy) = \iint_D \Big(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-yx^2)}{\partial y}\Big)dxdy.$$

Τρίτο παράδειγμα. Θα επαληθεύσουμε το Θεώρημα του Green για τις συναρτήσεις $P(x,y) = 2x^3 - y^3$ και $Q(x,y) = x^3 + y^3$ και τον δακτύλιο D που περιγράφεται από την σχέση $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$. Οι συναρτήσεις P και Q έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$ στο D. Το σύνορο του D αποτελείται από τους δύο κύκλους με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνες a και b. Ο εξωτερικός κύκλος διαγράφεται από την καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}_1$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}_1(t) = (b\cos t, b\sin t), \qquad t \in [0,2\pi].$$

Η $\boldsymbol{\sigma}_1$ έχει την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το σημείο $(0,0)$ αλλά *και* σε σχέση με τον δακτύλιο D. Ο εσωτερικός κύκλος διαγράφεται από την καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}_2$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}_2(t) = (a\cos t, a\sin t), \qquad t \in [0,2\pi].$$

Όμως η $\boldsymbol{\sigma}_2$ έχει την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το σημείο $(0,0)$ αλλά την *αρνητική* φορά διαγραφής σε σχέση με τον δακτύλιο D. Επομένως, όταν υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην $\boldsymbol{\sigma}_2$ θα βάλουμε αρνητικό πρόσημο μπροστά από αυτό.
Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\oint_{\boldsymbol{\sigma}_1}\Big((2x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy\Big) = b^4\int_0^{2\pi}\Big(&-(2\cos^3 t - \sin^3 t)\sin t\\ &+ (\cos^3 t + \sin^3 t)\cos t\Big)\,dt = \frac{3\pi}{2}b^4.\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$-\oint_{\boldsymbol{\sigma}_2}\Big((2x^3-y^3)\,dx+(x^3+y^3)\,dy\Big)=-\frac{3\pi}{2}a^4.$$

Άρα

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}_1}\Big((2x^3-y^3)\,dx+(x^3+y^3)\,dy\Big)-\oint_{\boldsymbol{\sigma}_2}\Big((2x^3-y^3)\,dx+(x^3+y^3)\,dy\Big)=\frac{3\pi}{2}(b^4-a^4). \quad (84)$$

Για το διπλό ολοκλήρωμα στον δακτύλιο χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες και έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_D\Big(\frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial x}-\frac{\partial(2x^3-y^3)}{\partial y}\Big)dxdy &= 3\iint_D(x^2+y^2)\,dxdy\\ &= 3\int_0^{2\pi}\Big(\int_a^b r^3\,dr\Big)d\theta=\frac{3\pi}{2}(b^4-a^4).\end{aligned} \quad (85)$$

Από τις (84) και (85) επαληθεύεται ο τύπος του Green:

$$\begin{aligned}\oint_{\boldsymbol{\sigma}_1}\Big((2x^3-y^3)\,dx+(x^3+y^3)\,dy\Big)&-\oint_{\boldsymbol{\sigma}_2}\Big((2x^3-y^3)\,dx+(x^3+y^3)\,dy\Big)\\ &=\iint_D\Big(\frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial x}-\frac{\partial(2x^3-y^3)}{\partial y}\Big)dxdy.\end{aligned}$$

10η εβδομάδα.

Τώρα θα γράψουμε τον τύπο του Green με μία διαφορετική μορφή. Προηγουμένως, όμως, θα εισαγάγουμε μερικά καινούργια σύμβολα και νέες έννοιες.

Θυμόμαστε ότι όταν έχουμε μια *πραγματική* συνάρτηση

$$f : D \to \mathbb{R}$$

ορισμένη σε ένα *ανοικτό* χωρίο D του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$, τότε ορίζεται η **κλίση** της f με τον τύπο

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

στα σημεία (x, y) ή (x, y, z) του D.

Τώρα δημιουργούμε το *συμβολικό* διάνυσμα

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

και το ονομάζουμε **ανάδελτα**. Επίσης, θα θεωρήσουμε *τελείως συμβολικά* την παραγώγιση $\frac{\partial f}{\partial x}$ ως "γινόμενο" του συμβόλου $\frac{\partial}{\partial x}$ με το σύμβολο της f. Ομοίως και με τις άλλες μεταβλητές:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να γράψουμε, πάντα *συμβολικά*, την κλίση της f ως "γινόμενο" του συμβόλου ∇ με το σύμβολο της f:

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f.$$

Έτσι, αφού το ∇ είναι (συμβολικό) διάνυσμα και το f είναι αριθμός (η f είναι αριθμητική συνάρτηση), το γινόμενο ∇f είναι διάνυσμα: και, πράγματι, το $\mathrm{grad}(f)$, όπως ορίσθηκε στην αρχή, είναι διάνυσμα.

Έτσι, από την αριθμητική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ δημιουργούμε την διανυσματική συνάρτηση

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f : D \to \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathbb{R}^3.$$

Κατόπιν, έστω διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathbb{R}^3,$$

όπου στην πρώτη περίπτωση το D είναι ανοικτό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ και στην δεύτερη περίπτωση το D είναι ανοικτό χωρίο του $\mathbb{R}^3$ (δηλαδή ο αριθμός των μεταβλητών είναι ίδιος με τον αριθμό των συντεταγμένων συναρτήσεων). Γράφουμε

$$\mathbf{f} = (P, Q) \quad \text{ή} \quad (P, Q, R),$$

με συντεταγμένες συναρτήσεις $P = P(x,y), Q = Q(x,y)$ ή, αντιστοίχως, $P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$. Τώρα ορίζουμε την **απόκλιση** της $\mathbf{f}$ με τον τύπο

$$\mathrm{div}(\mathbf{f}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Παρατηρούμε ότι, βάσει των "πολλαπλασιασμών" που ορίσαμε προηγουμένως ανάμεσα στα σύμβολα των παραγώγων και στα σύμβολα των (αριθμητικών) συναρτήσεων, το $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ μπορεί να θεωρηθεί ως "εσωτερικό γινόμενο" των διανυσμάτων $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ και $\mathbf{f} = (P,Q)$. Ομοίως, το $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ μπορεί να θεωρηθεί ως "εσωτερικό γινόμενο" των διανυσμάτων $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ και $\mathbf{f} = (P,Q,R)$. Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε *συμβολικά* την απόκλιση της $\mathbf{f}$ ως "εσωτερικό γινόμενο" του συμβόλων ∇ και $\mathbf{f}$:

$$\mathrm{div}(\mathbf{f}) = \nabla \cdot \mathbf{f}.$$

Έτσι, αφού το ∇ είναι (συμβολικό) διάνυσμα και το $\mathbf{f}$ είναι και αυτό διάνυσμα (η $\mathbf{f}$ είναι διανυσματική συνάρτηση), το γινόμενο $\nabla \cdot \mathbf{f}$ είναι αριθμός: και, πράγματι, το $\mathrm{div}(\mathbf{f})$, όπως ορίσθηκε στην αρχή, είναι αριθμός.

Έτσι, από την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ δημιουργούμε την αριθμητική συνάρτηση

$$\mathrm{div}(\mathbf{f}) = \nabla \cdot \mathbf{f} : D \to \mathbb{R}.$$

Τέλος, έστω διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3,$$

όπου το D είναι ανοικτό χωρίο του $\mathbb{R}^3$ (δηλαδή έχουμε τρεις μεταβλητές και τρεις συντεταγμένες συναρτήσεις). Γράφουμε

$$\mathbf{f} = (P,Q,R),$$

οπότε οι συντεταγμένες συναρτήσεις είναι $P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$. Τώρα ορίζουμε τον **στροβιλισμό** της $\mathbf{f}$ με τον τύπο

$$\mathrm{curl}(\mathbf{f}) = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big).$$

Τώρα, πάλι βάσει των "πολλαπλασιασμών" που ορίσαμε προηγουμένως ανάμεσα στα σύμβολα των παραγώγων και στα σύμβολα των (αριθμητικών) συναρτήσεων, θα υπολογίσουμε το "εξωτερικό γινόμενο" των διανυσμάτων $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ και $\mathbf{f} = (P,Q,R)$. Έχουμε:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big).$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε *συμβολικά* τον στροβιλισμό της $\mathbf{f}$ ως "εξωτερικό γινόμενο" του συμβόλων ∇ και $\mathbf{f}$:

$$\mathrm{curl}(\mathbf{f}) = \nabla \times \mathbf{f}.$$

Έτσι, αφού το ∇ είναι (συμβολικό) διάνυσμα και το $\mathbf{f}$ είναι και αυτό διάνυσμα (η $\mathbf{f}$ είναι διανυσματική συνάρτηση), το γινόμενο $\nabla \times \mathbf{f}$ είναι διάνυσμα: και, πράγματι, το $\mathrm{curl}(\mathbf{f})$, όπως ορίσθηκε στην αρχή, είναι διάνυσμα.

Έτσι, από την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3$ δημιουργούμε την διανυσματική συνάρτηση

$$\mathrm{curl}(\mathbf{f}) = \nabla \times \mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3.$$

Ως εξάσκηση με τα νέα σύμβολα θα αποδείξουμε δύο ταυτότητες που θα τις χρησιμοποιήσουμε και παρακάτω. Η πρώτη ταυτότητα είναι η:

$$\mathrm{curl}(\mathrm{grad}(f)) = \mathbf{0} \tag{86}$$

για αριθμητική συνάρτηση f *τριών* μεταβλητών. Αν θελήσουμε να αποδείξουμε αυτήν την ταυτότητα με τελείως συμβολικό τρόπο θα γράψουμε

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad}(f)) = \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f = \mathbf{0} f = \mathbf{0},$$

βάσει των γνωστών ιδιοτήτων των διανυσμάτων: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}\, t) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\, t$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Όμως, πρέπει να αποδειχθεί η ταυτότητα (86) και αυστηρά. Ιδού:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}(\operatorname{grad}(f)) &= \operatorname{curl}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) \\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big), \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\Big) \\ &= \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big) = (0,0,0) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Μία ακόμη ταυτότητα:

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{f})) = 0 \tag{87}$$

για διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f}$ τριών μεταβλητών και τριών συντεταγμένων. Πάλι, η απόδειξη με συμβολικό τρόπο γίνεται ως εξής:

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{f})) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0,$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα διανυσμάτων: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$. Πράγματι, το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι κάθετο σε καθένα από τα δύο διανύσματα. Αλλά και αυστηρά η (87) αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{f})) &= \operatorname{div}\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Τώρα, αφού είδαμε τις έννοιες της κλίσης, της απόκλισης και του στροβιλισμού, θα δούμε τον τύπο του Green με μία διαφορετική εμφάνιση. Ξαναγράφουμε τον τύπο του Green στην μορφή που τον γνωρίσαμε:

$$\sum_{j=1}^{k} \oint_{\boldsymbol{\sigma}_j} \big(P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy\big) = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big) dxdy, \tag{88}$$

όπου το D είναι χωρίο στο xy-επίπεδο (το οποίο μπορεί να χωριστεί σε μικρότερα χωρία καθένα από τα οποία είναι πρώτου και δεύτερου τύπου) οι συναρτήσεις $P = P(x,y)$ και $Q = Q(x,y)$ είναι αριθμητικές συναρτήσεις συνεχείς στο D και με μερικές παραγώγους $\frac{\partial P}{\partial y}$ και $\frac{\partial Q}{\partial x}$ συνεχείς στο D και οι $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$ είναι οι συνοριακές κλειστές καμπύλες του D με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με το D.

Τώρα θα θεωρήσουμε το xy-επίπεδο *μέσα στον xyz-χώρο* και έτσι το D θα το δούμε ως μία επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Θα παραμετρικοποιήσουμε το D μέσω της συνάρτησης

$$\boldsymbol{\Sigma} : D \to \mathbb{R}^3$$

με τύπο

$$\boldsymbol{\Sigma}(x,y) = (x,y,0), \qquad (x,y) \in D.$$

Δηλαδή, οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{\Sigma}$ είναι:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = 0.$$

Με άλλα λόγια, χρησιμοποιούμε ως παραμετρικό χωρίο το ίδιο το D, το οποίο είναι χωρίο στον $\mathbb{R}^2$, και ως παραμέτρους τα ίδια τα x, y.
Κατόπιν, θεωρούμε την διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{f} : D \times (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^3$$

με τύπο

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0), \qquad (x, y) \in D,\ z \in (-\infty, +\infty).$$

Δηλαδή, οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f}$ είναι οι $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες του z, και η $R = 0$, η οποία είναι σταθερή 0.
Τώρα υπολογίζουμε τον *στροβιλισμό* της $\mathbf{f}$:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) = \Big(0 - 0, 0 - 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) = \Big(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big).$$

Επομένως,

$$(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Επίσης έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial y} = \Big(\frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)}\Big) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}.$$

Μάλιστα, έτσι βλέπουμε ότι το κάθετο διάνυσμα $\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial y}$ στην επιφάνεια ταυτίζεται με το $\mathbf{k}$ και άρα είναι συγχρόνως *και* μοναδιαίο. Δηλαδή

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial y} = \mathbf{k}$$

και άρα

$$(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Τώρα, το επιφανειακό ολοκλήρωμα της αριθμητικής συνάρτησης $(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}$ στην επιφάνεια $\mathbf{\Sigma}$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}\, dA &= \iint_D \Big((\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}\Big)(x, y) \Big\| \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial y}(x, y) \Big\|\, dxdy \\
&= \iint_D \Big((\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}\Big)(x, y)\, dxdy \qquad (89) \\
&= \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\Big) dxdy.
\end{aligned}$$

Έτσι προέκυψε η δεξιά μεριά του τύπου (88) του Green.
Τώρα θεωρούμε μια οποιαδήποτε από τις συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_j$ του D και, για απλούστευση, ας την πούμε $\boldsymbol{\sigma}$ (χωρίς δείκτη). Έστω $[a, b]$ το παραμετρικό διάστημα της $\boldsymbol{\sigma}$, οπότε

$$\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$$

και έστω

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in [a, b].$$

Τώρα, όπως κάναμε και με το χωρίο D, θα θεωρήσουμε την $\boldsymbol{\sigma}$ ως καμπύλη μέσα στον xyz-χώρο. Επειδή η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι στο xy-επίπεδο, θα θεωρήσουμε προφανώς ως τρίτη συντεταγμένη της την σταθερή $z = z(t) = 0$. Δηλαδή θα γράψουμε

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), 0), \qquad t \in [a, b].$$

Έτσι η $\boldsymbol{\sigma}$ θεωρείται συνάρτηση $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.
Τώρα θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της αριθμητικής συνάρτησης $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$ στην $\boldsymbol{\sigma}$, όπου $\mathbf{T}$ είναι τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα στα σημεία της τροχιάς της $\boldsymbol{\sigma}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS &= \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t))\, \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \mathbf{f}(x(t), y(t), 0) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \Big(P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)), 0\Big) \cdot (x'(t), y'(t), 0)\, dt \qquad (90) \\
&= \int_a^b \Big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\Big)\, dt \\
&= \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \Big(P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy\Big).
\end{aligned}$$

Έτσι, παίρνοντας ως $\boldsymbol{\sigma}$ καθεμιά από τις $\boldsymbol{\sigma}_j$ και αθροίζοντας για $j = 1, \ldots, k$, προκύπτει η αριστερή μεριά του τύπου (88).
Τώρα, από τις (89) και (90), ο τύπος (88) του Green γράφεται στην εξής μορφή:

$$\sum_{j=1}^{k} \oint_{\boldsymbol{\sigma}_j} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}\, dA. \qquad (91)$$

Αυτόν τον τύπο θα τον γενικεύσουμε ώστε να ισχύει για γενικότερες επιφάνειες στον xyz-χώρο $\mathbb{R}^3$. Πριν τον γενικεύσουμε, ας κατανοήσουμε πλήρως αυτό που βλέπουμε στον τύπο (91). Έχουμε μια επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$ η οποία είναι επίπεδη: βρίσκεται στο xy-επίπεδο. Στην επιφάνεια αυτή ολοκληρώνουμε ως προς στοιχειώδες εμβαδόν (το dA) το εσωτερικό γινόμενο $(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}$ του στροβιλισμού μιας διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{f}$ με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}$ στην επιφάνεια. Προσέξτε ότι, επειδή η επιφάνεια βρίσκεται στο xy-επίπεδο, το $\mathbf{N}$ ταυτίζεται σε κάθε σημείο της επιφάνειας με το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{k}$. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το $\mathbf{N}$ θα μπορούσε να ήταν ίσο με το άλλο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, το $-\mathbf{k}$, αλλά δεν είναι. Αυτά όσον αφορά στην δεξιά πλευρά της (91). Στην άλλη πλευρά έχουμε τις συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_j$ της $\boldsymbol{\Sigma}$. Σ' αυτές ολοκληρώνουμε ως προς στοιχειώδες μήκος (το dS) το εσωτερικό γινόμενο της $\mathbf{f}$ με το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}$ στις καμπύλες. Τώρα *έχει πολύ μεγάλη σημασία να ξεκαθαρίσουμε την σχέση ανάμεσα στον προσανατολισμό της επιφάνειας* $\boldsymbol{\Sigma}$ *και στους προσανατολισμούς των καμπυλών* $\boldsymbol{\sigma}_j$. Ο προσανατολισμός της $\boldsymbol{\Sigma}$ καθορίζεται από το ότι τα κάθετα διανύσματα είναι τα $\mathbf{N} = \mathbf{k}$ και όχι τα αντίθετα $-\mathbf{k}$. Οι προσανατολισμοί των συνοριακών καμπυλών $\boldsymbol{\sigma}_j$ καθορίζονται από τις κατευθύνσεις των εφαπτόμενων διανυσμάτων τους $\mathbf{T}$. Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στον προσανατολισμό της $\boldsymbol{\Sigma}$ και στους προσανατολισμούς των $\boldsymbol{\sigma}_j$; Το Θεώρημα του Green αναφέρει ότι οι καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_j$ έχουν την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το χωρίο D. Αυτό το εξηγήσαμε με παραστατικό τρόπο ως εξής: όταν περπατάμε πάνω στην τροχιά της $\boldsymbol{\sigma}_j$ προς την κατεύθυνση που δείχνουν τα εφαπτόμενα διανύσματα $\mathbf{T}$ (δηλαδή κατά την φορά διαγραφής της $\boldsymbol{\sigma}_j$) το αριστερό μας χέρι πρέπει να δείχνει προς το εσωτερικό του χωρίου D ή, ισοδύναμα, το δεξί μας χέρι πρέπει να δείχνει προς το εξωτερικό του D. Βέβαια, υπονοείται, *αλλά τώρα ας το αναφέρουμε ρητά*, ότι περπατάμε όρθιοι πάνω στο xy-επίπεδο και το κεφάλι μας είναι προς τα πάνω: το σώμα μας ταυτίζεται με το διάνυσμα $\mathbf{N} = \mathbf{k}$, το οποίο το περιφέρουμε πάνω στην επιφάνεια και ειδικότερα πάνω στα σημεία των συνοριακών καμπυλών $\boldsymbol{\sigma}_j$. Φτάνουμε στο κρίσιμο σημείο. Ας υποθέσουμε ότι είμαστε το διάνυσμα

$\mathbf{N} = \mathbf{k}$ και ότι *στιγμιαία* (διότι περπατάμε) βρισκόμαστε σε ένα σημείο της τροχιάς μιας από τις $\boldsymbol{\sigma}_j$. Το ότι περπατάμε προς την κατεύθυνση του $\mathbf{T}$ σ' αυτό το σημείο σημαίνει φυσικά ότι η μύτη μας έχει την (οριζόντια) κατεύθυνση του $\mathbf{T}$. *Ποιά είναι τότε η (οριζόντια) κατεύθυνση του δεξιού μας χεριού;* Το δεξί μας χέρι θα είναι εκείνο το μοναδιαίο διάνυσμα στο xy-επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο $\mathbf{T}$ (που κι αυτό βρίσκεται στο xy-επίπεδο) και που όταν το το στρίψουμε οριζόντια κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ *κατά την φορά την αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού* (όπως κοιτάμε από πάνω, δηλαδή σαν να είμαστε το $\mathbf{k}$) θα πάρει την κατεύθυνση της μύτης μας, δηλαδή του $\mathbf{T}$. Τώρα έχουμε το εξής απλό από την αναλυτική γεωμετρία του xy-επιπέδου. Όταν έχουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{T} = (p, q, 0)$, τότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{T}^* = (q, -p, 0)$ είναι εκείνο που όταν το στρίψουμε αντι-ωρολογιακά (όπως κοιτάμε από πάνω, δηλαδή σαν να είμαστε το $\mathbf{k}$) κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ θα ταυτιστεί με το $\mathbf{T} = (p, q, 0)$. Με άλλα λόγια:

Όταν στεκόμαστε όρθιοι όπως το $\mathbf{k}$ *και η μύτη μας έχει την (οριζόντια) κατεύθυνση του* $\mathbf{T}$*, τότε το δεξί μας χέρι έχει την (οριζόντια) κατεύθυνση του* $\mathbf{T}^*$.

Στην αναλυτική γεωμετρία του χώρου, λέμε ότι τρία μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (με αυτήν την σειρά) αποτελούν **δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα** αν είναι ανά δύο κάθετα και ισχύει το εξής: όταν στεκόμαστε όπως το $\mathbf{c}$ έτσι ώστε το δεξί μας χέρι να είναι το $\mathbf{a}$, τότε κοιτάμε προς την κατεύθυνση του $\mathbf{b}$. Δηλαδή όταν στρίψουμε το δεξί μας χέρι, το $\mathbf{a}$, αντι-ωρολογιακά κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ αυτό θα συναντήσει το $\mathbf{b}$. Επομένως, όσα είπαμε παραπάνω σημαίνουν ότι:

Τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{T}^*$*,* $\mathbf{T}$ *και* $\mathbf{N} = \mathbf{k}$ *(με αυτήν την σειρά) αποτελούν δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα.*

Μετά από όλα αυτά ας απαντήσουμε στο ερώτημα που είχαμε θέσει: αυτό που συσχετίζει τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{N} = \mathbf{k}$ και $\mathbf{T}$ (και άρα συσχετίζει τον προσανατολισμό της $\boldsymbol{\Sigma}$ με τους προσανατολισμούς των $\boldsymbol{\sigma}_j$) είναι ο εξής κανόνας:

Σε κάθε σημείο των τροχιών των $\boldsymbol{\sigma}_j$ *τα μοναδιαία διανύσματα* $\mathbf{T}$ *(η μύτη μας) και* $\mathbf{N} = \mathbf{k}$ *(εμείς, όρθιοι) πρέπει να είναι έτσι τοποθετημένα ώστε το μοναδιαίο διάνυσμα* $\mathbf{T}^*$ *(το δεξί μας χέρι) να κατευθύνεται προς το εξωτερικό του* D.

Τώρα θα δούμε το δεύτερο ολοκληρωτικό θεώρημα της διανυσματικής ανάλυσης, το *Θεώρημα του Stokes*. Πρώτα έχουμε τις υποθέσεις. Θεωρούμε μια επιφάνεια

$$\boldsymbol{\Sigma} : D \to \mathbb{R}^3,$$

όπου D είναι ένα χωρίο στο uv-επίπεδο στο οποίο μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα του Green. Δηλαδή, το D μπορεί να χωριστεί σε μικρότερα χωρία καθένα από τα οποία είναι πρώτου και δεύτερου τύπου. Επίσης, το D έχει συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_k$ με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με το D. Κατόπιν, θεωρούμε τις συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$ της επιφάνειας $\boldsymbol{\Sigma}$. Αυτές προκύπτουν ως οι "εικόνες" των $\boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_k$ μέσω της συνάρτησης $\boldsymbol{\Sigma}$. Δηλαδή, αν

$$\boldsymbol{\rho}_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2$$

τότε

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \boldsymbol{\Sigma} \circ \boldsymbol{\rho}_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^3.$$

Από την $\boldsymbol{\Sigma}$ προκύπτουν τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma}(u,v)) = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v)}{\|\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\|}$$

σε κάθε σημείο $\boldsymbol{\Sigma}(u, v)$ της επιφάνειας. Εδώ πρέπει να πούμε ότι *οι καμπύλες* $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$ *έχουν την θετική φορά διαγραφής ως προς την επιφάνεια* $\boldsymbol{\Sigma}$. Αυτό σημαίνει το εξής. Έστω οποιοδήποτε σημείο w κάποιας από τις $\boldsymbol{\sigma}_j$ και έστω τα μοναδιαία κάθετα μεταξύ τους διανύσματα $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{T}$ και $\mathbf{N}$ στο σημείο w, εκ των οποίων το $\mathbf{N}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια στο w, το $\mathbf{T}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη στο w και το $\mathbf{T}^*$ είναι τέτοιο ώστε τα τρία

διανύσματα $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{T}$ και $\mathbf{N}$ (με αυτήν την σειρά) να αποτελούν δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα. Τότε το $\mathbf{T}^*$ κατευθύνεται προς το εξωτερικό της επιφάνειας. Το ότι συμβαίνει αυτό, δηλαδή το ότι οι καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_k$ έχουν την θετική φορά διαγραφής ως προς την επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$, θα το δούμε παρακάτω όταν θα κάνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος του Stokes.
Τέλος, θεωρούμε και μια διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{f} : \boldsymbol{\Sigma}(D) \to \mathbb{R}^3.$$

Μετά από όλα αυτά, έχουμε τον **γενικό τύπο του Stokes**:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k} \oint_{\boldsymbol{\sigma}_j} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}\, dA.} \tag{92}$$

Οι προϋποθέσεις για τον τύπο του Stokes είναι: *η επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$ έχει παραμετρικό χωρίο ένα χωρίο στο οποίο μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Green, οι κλειστές συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_k$ της $\boldsymbol{\Sigma}$ έχουν θετική φορά διαγραφής σε σχέση με την $\boldsymbol{\Sigma}$ και οι συντεταγμένες συναρτήσεις της $\mathbf{f}$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στην $\boldsymbol{\Sigma}$.*

Παρατηρούμε ότι αυτός ο τύπος είναι ίδιος με τον τύπο (91), μόνο που ο (91) έχει να κάνει με μια ειδική περίπτωση: η επιφάνεια είναι πάνω στο xy-επίπεδο, ενώ τώρα η επιφάνεια είναι στον xyz-χώρο και δεν είναι κατ' ανάγκη επίπεδη. Ο τύπος (91) είναι απλώς μια δεύτερη μορφή του τύπου του Green.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (61) και (70) που περιγράφουν την σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώματα (επικαμπύλια ή επιφανειακά) βαθμωτών και διανυσματικών συναρτήσεων, μπορούμε να γράψουμε τον τύπο (92) και ως:

$$\sum_{j=1}^{k} \oint_{\boldsymbol{\sigma}_j} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_j = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}. \tag{93}$$

Επίσης, αν

$$\mathbf{f} = (P, Q, R),$$

τότε

$$\nabla \times \mathbf{f} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Άρα, χρησιμοποιώντας την (73), μπορούμε να γράψουμε τον τύπο (92) και ως εξής:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} \oint_{\boldsymbol{\sigma}_j} (P\, dx + Q\, dy + R\, dz) \\ &= \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right). \end{aligned} \tag{94}$$

Θα αποδείξουμε τον τύπο του Stokes στην περίπτωση που η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι γράφημα συνάρτησης $z = z(x, y)$, όπου το (x, y) διατρέχει το σύνολο D στο xy-επίπεδο:

$$\boldsymbol{\Sigma}(x, y) = (x, y, z(x, y)), \qquad (x, y) \in D.$$

Υποθέτουμε ότι το D είναι ένα χωρίο στο xy-επίπεδο στο οποίο μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα του Green και ότι το D έχει μόνο μία συνοριακή καμπύλη, την $\boldsymbol{\rho}$, με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το D. Έστω

$$\boldsymbol{\rho}(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in [a, b].$$

Θεωρούμε την συνοριακή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ της επιφάνειας $\boldsymbol{\Sigma}$ που προκύπτει ως η "εικόνα" της $\boldsymbol{\rho}$ μέσω της συνάρτησης $\boldsymbol{\Sigma}$. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\rho}(t)) = \Big(x(t), y(t), z(x(t), y(t)) \Big), \qquad t \in [a, b].$$

Η $\mathbf{\Sigma}$ προσδιορίζει τα κάθετα διανύσματα

$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial y}(x,y) = \Big(- \frac{\partial z}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial z}{\partial y}(x,y), 1\Big)$$

και άρα τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα

$$\mathbf{N}(\mathbf{\Sigma}(x,y)) = \Big(- \frac{\partial z}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial z}{\partial y}(x,y), 1\Big) \Big/ \sqrt{\Big(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\Big)^2 + 1}$$

σε κάθε σημείο $\mathbf{\Sigma}(x,y) = (x,y,z(x,y))$ της επιφάνειας. Τώρα μπορούμε, με την βοήθεια ενός απλού σχήματος, να δούμε ότι η καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ έχει την θετική φορά διαγραφής ως προς την επιφάνεια $\mathbf{\Sigma}$. Πράγματι, τα διανύσματα $\mathbf{N}$ που βρήκαμε έχουν *θετική* τρίτη συντεταγμένη και άρα κατευθύνονται προς τα πάνω (σε σχέση με το xy-επίπεδο). Ομοίως και τα διανύσματα $\mathbf{k}$ (τα οποία είναι κάθετα στο χωρίο D του xy-επιπέδου) έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω. Η καμπύλη $\boldsymbol{\rho}$ περιστρέφεται αντι-ωρολογιακά σε σχέση με τα διανύσματα $\mathbf{k}$ που είναι κάθετα στο D και, επειδή η $\boldsymbol{\sigma}$ βρίσκεται ακριβώς από πάνω από την $\boldsymbol{\rho}$ και περιστρέφεται ακριβώς όπως η $\boldsymbol{\rho}$, συμπεραίνουμε ότι και η $\boldsymbol{\sigma}$ περιστρέφεται αντι-ωρολογιακά σε σχέση με τα διανύσματα $\mathbf{N}$ που είναι κάθετα στην $\mathbf{\Sigma}$.
Τέλος, θεωρούμε και την διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{f})(\mathbf{\Sigma}(x,y)) \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial y}(x,y)\Big) &= (\nabla \times \mathbf{f})(x,y,z(x,y)) \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial y}(x,y)\Big) \\
&= -\Big(\frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z(x,y)) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z(x,y))\Big)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \\
&\quad - \Big(\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z(x,y)) - \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z(x,y))\Big)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \\
&\quad + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z(x,y)) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z(x,y))\Big).
\end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος, έχουμε

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{\Sigma} &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{f})(\mathbf{\Sigma}(x,y)) \cdot \Big(\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial y}(x,y)\Big) dxdy \\
&= \iint_D \Big[\Big(\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z(x,y)) - \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z(x,y))\Big)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \\
&\quad + \Big(\frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z(x,y)) - \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z(x,y))\Big)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \\
&\quad + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z(x,y)) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z(x,y))\Big)\Big] dxdy.
\end{aligned} \tag{95}$$

Κατόπιν, βάσει του τύπου της $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \Big(x'(t), y'(t), \frac{\partial z}{\partial x}(x(t),y(t))\, x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}(x(t),y(t))\, y'(t)\Big)$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t) &= P(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))\, x'(t) + Q(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))\, y'(t) \\
&\quad + R(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))\Big(\frac{\partial z}{\partial x}(x(t),y(t))\, x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}(x(t),y(t))\, y'(t)\Big) \\
&= \Big(P(x(t),y(t),z(x(t),y(t))) + R(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))\,\frac{\partial z}{\partial x}(x(t),y(t))\Big) x'(t) \\
&\quad + \Big(Q(x(t),y(t),z(x(t),y(t))) + R(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))\,\frac{\partial z}{\partial y}(x(t),y(t))\Big) y'(t).
\end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος και σύμφωνα με τον τύπο του Green που θα χρησιμοποιήσουμε στην τέταρτη ισότητα παρακάτω, έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \Big[\Big(P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) \\
&\quad + R(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))\, \frac{\partial z}{\partial x}(x(t), y(t))\Big) x'(t) \\
&\quad + \Big(Q(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) \\
&\quad + R(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))\, \frac{\partial z}{\partial y}(x(t), y(t))\Big) y'(t)\Big] dt \\
&= \oint_{\boldsymbol{\rho}} \Big[\Big(P(x, y, z(x, y)) + R(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\Big) dx \\
&\quad + \Big(Q(x, y, z(x, y)) + R(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\Big) dy\Big] \\
&= \iint_D \Big[- \frac{\partial}{\partial y}\Big(P(x, y, z(x, y)) + R(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\Big) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}\Big(Q(x, y, z(x, y)) + R(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\Big)\Big] dxdy \\
&= \iint_D \Big[- \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z(x, y)) - \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \\
&\quad - \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\, \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \\
&\quad - R(x, y, z(x, y)\, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x, y) \\
&\quad + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z(x, y)) + \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \\
&\quad + \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\, \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \\
&\quad + R(x, y, z(x, y))\, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y)\Big] dxdy.
\end{aligned} \tag{96}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι τέσσερεις όροι του τελευταίου αθροίσματος μέσα στο $\iint_D$ διαγράφονται και, κατόπιν, ότι το $\iint_D$ που θα προκύψει είναι ίσο με το $\iint_D$ που εμφανίζεται στην (95). Άρα από τις (95) και (96) προκύπτει $\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ ή, ισοδύναμα,

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}\, dA. \tag{97}$$

Τώρα, με το ίδιο τέχνασμα που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλογη κατάσταση με τον τύπο του Green, μπορούμε να επεκτείνουμε τον τύπο (97) από επιφάνειες που είναι γραφήματα σε γενικότερες επιφάνειες κι έτσι να αποδείξουμε τον γενικό τύπο (92) του Stokes. Κατ' αρχάς είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απόδειξη που κάναμε στην περίπτωση γραφήματος συνάρτησης $z = z(x, y)$ επαναλαμβάνεται με απλές αλλαγές στις περιπτώσεις γραφημάτων συναρτήσεων $x = x(y, z)$ και $y = y(x, z)$. Κατόπιν, αν έχουμε μια γενικότερη επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$ όπως αυτή που αναφέρεται στις υποθέσεις του Θεωρήματος του Stokes, αποδεικνύεται ότι αυτή μπορεί να χωριστεί σε μικρότερες επιφάνειες $\boldsymbol{\Sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_m$ καθεμία από τις οποίες είναι γράφημα συνάρτησης $z = z(x, y)$ ή $x = x(y, z)$ ή $y = y(x, z)$. Υποθέτουμε ότι οι συνοριακές καμπύλες τους είναι οι $\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_m$ με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με τις αντίστοιχες επιφάνειες. Τέλος, έστω ότι η $\boldsymbol{\Sigma}$ έχει συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$ με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με την $\boldsymbol{\Sigma}$. Ο τύπος (97) που αποδείξαμε έχει ισχύ για καθεμία από τις $\boldsymbol{\Sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}_m$ και τις αντίστοιχες $\boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_m$. Δηλαδή

$$\oint_{\boldsymbol{\rho}_l} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}_l} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}\, dA, \qquad l = 1, \ldots, m.$$

Επειδή το άθροισμα των επιφανειακών ολοκληρωμάτων στις $\boldsymbol{\Sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}_m$ είναι ίσο με το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην $\boldsymbol{\Sigma}$, όταν προσθέσουμε αυτούς τους τύπους θα βρούμε

$$\sum_{l=1}^{m} \oint_{\boldsymbol{\rho}_l} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}\, dA. \tag{98}$$

Τώρα παρατηρούμε τα εξής. Οι συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_m$ των $\boldsymbol{\Sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}_m$ έχουν κάποια μέρη τους τα οποία είναι κοινά με τις συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$ της $\boldsymbol{\Sigma}$ και κάποια άλλα μέρη τους τα οποία είναι κοινά μεταξύ τους: δηλαδή, αν δύο επιφάνειες $\boldsymbol{\Sigma}_{l_1}$ και $\boldsymbol{\Sigma}_{l_2}$ συνορεύουν, τότε το κοινό σύνορό τους είναι κοινό μέρος των αντίστοιχων $\boldsymbol{\rho}_{l_1}$ και $\boldsymbol{\rho}_{l_2}$. Μάλιστα, *αυτό το κοινό μέρος έχει αντίθετες φορές διαγραφής: μία θετική σε σχέση με την $\boldsymbol{\Sigma}_{l_1}$ και μία θετική σε σχέση με την $\boldsymbol{\Sigma}_{l_2}$*. Τώρα, όταν "σπάσουμε" καθένα από τα $\int_{\boldsymbol{\rho}_l} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS$ σε άθροισμα επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στα διάφορα μέρη της αντίστοιχης $\boldsymbol{\rho}_l$, βλέπουμε ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα στα μέρη που είναι κοινά μεταξύ των διαφόρων $\boldsymbol{\rho}_l$ αλληλοαναιρούνται στο συνολικό άθροισμα στην αριστερή μεριά της (98) διότι έχουν αντίθετα πρόσημα. Έτσι απομένουν μόνο τα επικαμπύλια ολοκληρώματα στα μέρη των $\boldsymbol{\rho}_l$ τα οποία είναι κοινά με τις συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$ της $\boldsymbol{\Sigma}$ και μάλιστα με τις ίδιες φορές διαγραφής που έχουν ως μέρη των $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$. Το άθροισμα αυτών των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων θα μας δώσει το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στις $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$ και έτσι προκύπτει ο γενικός τύπος (92).

Και τώρα θα δούμε το τρίτο ολοκληρωτικό θεώρημα της διανυσματικής ανάλυσης, το *Θεώρημα του Gauss*. Θα ξεκινήσουμε την μελέτη μας με μια ειδική περίπτωση. Θεωρούμε χωρίο Ω του τύπου

$$\Omega = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\},$$

όπου D είναι ένα χωρίο στο xy-επίπεδο. Δηλαδή, το Ω βρίσκεται ανάμεσα στα γραφήματα των πραγματικών συναρτήσεων $z = \phi_1(x, y)$ και $z = \phi_2(x, y)$. Ας ονομάσουμε ένα τέτοιο Ω *χωρίο τρίτου τύπου*. Θεωρούμε και μια πραγματική συνάρτηση

$$R : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Τότε, σύμφωνα με τους τύπους του Fubini, έχουμε

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, dV &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{D} \Big(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dz \Big) dxdy \\ &= \iint_{D} \Big(R(x, y, \phi_2(x, y)) - R(x, y, \phi_1(x, y)) \Big) dxdy. \end{aligned} \tag{99}$$

Παρατηρούμε ότι η συνοριακή επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$ του χωρίου Ω είναι **κλειστή**, δηλαδή δεν έχει συνοριακές καμπύλες.

Τώρα, η $\boldsymbol{\Sigma}$ χωρίζεται σε τρεις επί μέρους επιφάνειες, την παράπλευρη επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}_0$ η οποία είναι κυλινδρική και κατακόρυφα πάνω από την συνοριακή καμπύλη του χωρίου D στο xy-επίπεδο, την κάτω επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}_1$ η οποία είναι το γράφημα της $z = \phi_1(x, y)$ για $(x, y) \in D$ και την πάνω επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}_2$ η οποία είναι το γράφημα της $z = \phi_2(x, y)$ για $(x, y) \in D$. Αν $\mathbf{N}$ είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στα σημεία της $\boldsymbol{\Sigma}$, θα συμβολίσουμε $\mathbf{N}_z$ την *τρίτη* συντεταγμένη τους. Επειδή η $\boldsymbol{\Sigma}_0$ είναι κατακόρυφη, τα διανύσματα $\mathbf{N}$ στα σημεία της είναι παράλληλα στο xy-επίπεδο και άρα ισχύει $\mathbf{N}_z = 0$ γι αυτά. Άρα

$$\iint_{\boldsymbol{\Sigma}_0} R\, \mathbf{N}_z\, dA = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}_0} 0\, dA = 0. \tag{100}$$

Για το πάνω μέρος της $\mathbf{\Sigma}$ χρησιμοποιούμε την παραμέτριση

$$\mathbf{\Sigma}_2(x,y) = (x,y,\phi_2(x,y)), \qquad (x,y) \in D$$

και, όπως έχουμε δει αρκετές φορές μέχρι τώρα, έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{\Sigma}_2}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_2}{\partial y}(x,y) = \Big(- \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x,y), - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x,y), 1 \Big)$$

με μοναδιαία κάθετα διανύσματα τα

$$\mathbf{N}(\mathbf{\Sigma}_2(x,y)) = \Big(- \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x,y), - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x,y), 1 \Big) \Big/ \sqrt{\Big(\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x,y)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x,y)\Big)^2 + 1}.$$

Παρατηρούμε ότι η τρίτη συντεταγμένη του $\mathbf{N}$ είναι θετική:

$$\mathbf{N}_z(\mathbf{\Sigma}_2(x,y)) = 1 \Big/ \sqrt{\Big(\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x,y)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x,y)\Big)^2 + 1}.$$

Άρα το $\mathbf{N}$ κατευθύνεται προς τα πάνω, δηλαδή προς την εξωτερική μεριά του Ω. Άρα

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{\Sigma}_2} R\,\mathbf{N}_z\,dA &= \iint_D R(\mathbf{\Sigma}_2(x,y))\,\mathbf{N}_z(\mathbf{\Sigma}_2(x,y)) \Big\| \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_2}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_2}{\partial y}(x,y) \Big\| \,dxdy \\ &= \iint_D R(x,y,\phi_2(x,y))\,dxdy.\end{aligned} \tag{101}$$

Αν για την κάτω μεριά της $\mathbf{\Sigma}$ χρησιμοποιήσουμε την παραμέτριση $\mathbf{\Sigma}_1(x,y) = (x,y,\phi_1(x,y))$, $(x,y) \in D$, τότε θα βρούμε ότι $\iint_{\mathbf{\Sigma}_1} R\,\mathbf{N}_z\,dA = \iint_D R(x,y,\phi_1(x,y))\,dxdy$. Όμως, παρατηρούμε ότι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα με αυτήν την παραμέτριση έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω ενώ εμείς θέλουμε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα να κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά του Ω, δηλαδή *προς τα κάτω*. Άρα χρειαζόμαστε παραμέτριση με τον αντίθετο προσανατολισμό και επομένως το σωστό αποτέλεσμα είναι

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}_1} R\,\mathbf{N}_z\,dA = - \iint_D R(x,y,\phi_1(x,y))\,dxdy. \tag{102}$$

Τώρα, από τις (100), (101) και (102) έχουμε

$$\begin{aligned}\oiint_{\mathbf{\Sigma}} R\,\mathbf{N}_z\,dA &= \iint_{\mathbf{\Sigma}_0} R\,\mathbf{N}_z\,dA + \iint_{\mathbf{\Sigma}_1} R\,\mathbf{N}_z\,dA + \iint_{\mathbf{\Sigma}_2} R\,\mathbf{N}_z\,dA \\ &= \iint_D \Big(R(x,y,\phi_2(x,y)) - R(x,y,\phi_1(x,y)) \Big)\,dxdy.\end{aligned}$$

Σημείωση. Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\oiint_{\mathbf{\Sigma}}$ για το επιφανειακό ολοκλήρωμα όταν η επιφάνεια $\mathbf{\Sigma}$ είναι *κλειστή*.

Από την τελευταία σχέση και από την (99) έχουμε

$$\oiint_{\mathbf{\Sigma}} R\,\mathbf{N}_z\,dA = \iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,dV.$$

Με τον ίδιο τρόπο, αν θεωρήσουμε χωρίο

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in D,\ \phi_1(x,z) \le y \le \phi_2(x,z)\},$$

το οποίο θα ονομάσουμε *χωρίο δεύτερου τύπου*, και πραγματική συνάρτηση $Q : \Omega \to \mathbb{R}$, αποδεικνύουμε ότι

$$\oiint_{\mathbf{\Sigma}} Q\,\mathbf{N}_y\,dA = \iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV,$$

όπου $\mathbf{N}_y$ είναι η δεύτερη συντεταγμένη του $\mathbf{N}$. Ομοίως, αν θεωρήσουμε χωρίο

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in D,\ \phi_1(y,z) \le x \le \phi_2(y,z)\},$$

το οποίο θα ονομάσουμε *χωρίο πρώτου τύπου*, και πραγματική συνάρτηση $P : \Omega \to \mathbb{R}$, τότε

$$\oiint_{\mathbf{\Sigma}} P\,\mathbf{N}_x\, dA = \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\, dV,$$

όπου $\mathbf{N}_x$ είναι η πρώτη συντεταγμένη του $\mathbf{N}$. Αθροίζουμε τις τρεις αυτές σχέσεις και έχουμε

$$\oiint_{\mathbf{\Sigma}} (P\,\mathbf{N}_x + Q\,\mathbf{N}_y + R\,\mathbf{N}_z)\, dA = \iiint_{\Omega} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big) dV$$

όταν το χωρίο Ω είναι συγχρόνως πρώτου, δεύτερου και τρίτου τύπου. Τώρα παίρνοντας διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} = (P,Q,R)$ παρατηρούμε ότι

$$P\,\mathbf{N}_x + Q\,\mathbf{N}_y + R\,\mathbf{N}_z = (P,Q,R)\cdot(\mathbf{N}_x,\mathbf{N}_y,\mathbf{N}_z) = \mathbf{f}\cdot\mathbf{N}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla\cdot\mathbf{f}.$$

Άρα η τελευταία σχέση γράφεται

$$\oiint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{N}\, dA = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\mathbf{f}\, dV. \tag{103}$$

Τώρα με ένα απλό τέχνασμα, ίδιο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του γενικού τύπου του Green αλλά και του γενικού τύπου του Stokes, μπορούμε να επεκτείνουμε αυτόν τον τύπο για πολύ γενικότερα χωρία Ω: εκείνα τα οποία διαμερίζονται σε μικρότερα χωρία τα οποία είναι συγχρόνως πρώτου, δεύτερου και τρίτου τύπου. Θεωρούμε ένα τέτοιο χωρίο Ω και έστω ότι αυτό χωρίζεται σε μικρότερα χωρία $\Omega_1,\ldots,\Omega_m$, καθένα από τα οποία είναι συγχρόνως πρώτου, δεύτερου και τρίτου τύπου. Υποθέτουμε ότι οι συνοριακές επιφάνειές τους είναι οι $\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_m$ καθεμία από τις οποίες είναι προσανατολισμένη έτσι ώστε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματά της να κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά του αντίστοιχου χωρίου. Τέλος, έστω ότι το Ω έχει συνοριακές επιφάνειες $\mathbf{\Sigma}_1,\ldots,\mathbf{\Sigma}_k$ καθεμία από τις οποίες είναι προσανατολισμένη έτσι ώστε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματά της να κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά του Ω. Ο τύπος (103) που αποδείξαμε έχει ισχύ για καθένα από τα χωρία $\Omega_1,\ldots,\Omega_m$. Δηλαδή

$$\oiint_{\mathbf{P}_l} \mathbf{f}\cdot\mathbf{N}\, dA = \iiint_{\Omega_l} \nabla\cdot\mathbf{f}\, dV, \qquad l = 1,\ldots,m.$$

Επειδή το άθροισμα των τριπλών ολοκληρωμάτων στα $\Omega_1,\ldots,\Omega_m$ είναι ίσο με το τριπλό ολοκλήρωμα στο Ω, όταν προσθέσουμε αυτούς τους τύπους θα βρούμε

$$\sum_{l=1}^{m} \oiint_{\mathbf{P}_l} \mathbf{f}\cdot\mathbf{N}\, dA = \iiint_{\Omega_l} \nabla\cdot\mathbf{f}\, dV. \tag{104}$$

Τώρα παρατηρούμε τα εξής. Οι συνοριακές επιφάνειες $\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_m$ των $\Omega_1,\ldots,\Omega_m$ έχουν κάποια μέρη τους τα οποία είναι κοινά με τις συνοριακές επιφάνειες $\mathbf{\Sigma}_1,\ldots,\mathbf{\Sigma}_k$ του Ω και κάποια άλλα μέρη τους τα οποία είναι κοινά μεταξύ τους: δηλαδή, αν δύο χωρία Ω_{l_1} και Ω_{l_2} συνορεύουν, τότε το κοινό σύνορό τους είναι κοινό μέρος των αντίστοιχων $\mathbf{P}_{l_1}$ και $\mathbf{P}_{l_2}$. Τώρα, *αυτό το κοινό μέρος έχει αντίθετους προσανατολισμούς διότι τα κάθετα διανύσματα είναι αντίθετα: τα μεν κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά του Ω_{l_1} και τα δε κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά του Ω_{l_2}*. Τώρα, όταν "σπάσουμε" καθένα από τα $\int_{\mathbf{P}_l} \mathbf{f}\cdot\mathbf{N}\, dA$ σε άθροισμα επιφανειακών ολοκληρωμάτων στα διάφορα μέρη της αντίστοιχης $\mathbf{P}_l$, βλέπουμε ότι τα επιφανειακά ολοκληρώματα στα μέρη που είναι κοινά μεταξύ των διαφόρων $\mathbf{P}_l$ αλληλοαναιρούνται στο συνολικό άθροισμα στην αριστερή μεριά της (104) διότι έχουν αντίθετα πρόσημα. Έτσι απομένουν μόνο τα επιφανειακά ολοκληρώματα στα μέρη των $\mathbf{P}_l$ τα οποία είναι κοινά με τις συνοριακές επιφάνειες $\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_k$ του Ω και μάλιστα με τους ίδιους προσανατολισμούς που έχουν ως μέρη των $\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_k$. Το άθροισμα αυτών των επιφανειακών ολοκληρωμάτων θα μας δώσει το άθροισμα των επιφανειακών ολοκληρωμάτων στις $\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_k$. Άρα η (104) θα γίνει

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k} \oiint_{\mathbf{\Sigma}_j} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}\, dA = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV.} \tag{105}$$

Αυτός είναι ο **γενικός τύπος του Gauss** και επαναλαμβάνουμε τις προϋποθέσεις: *το Ω είναι χωρίο στον xyz-χώρο, το οποίο μπορεί να χωριστεί σε μικρότερα χωρία καθένα από τα οποία είναι συγχρόνως πρώτου, δεύτερου και τρίτου τύπου, η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ είναι τέτοια ώστε οι συντεταγμένες συναρτήσεις της έχουν μερικές παραγώγους συνεχείς στο Ω και οι $\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_k$ είναι οι συνοριακές κλειστές επιφάνειες του Ω με τέτοιους προσανατολισμούς ώστε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματά τους να κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά του Ω.*

Ένας άλλος τρόπος να γράψουμε τον τύπο του Gauss είναι:

$$\sum_{j=1}^{k} \oiint_{\mathbf{\Sigma}_j} (P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy) = \iiint_{\Omega} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \Big) dxdydz. \tag{106}$$

11η εβδομάδα.

Τώρα θα γράψουμε τον τύπο του Green με μία τρίτη διαφορετική μορφή. Η αρχική του μορφή είναι η:

$$\sum_{j=1}^{k} \oint_{\boldsymbol{\sigma}_j} \Big(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\Big) = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)\,dxdy \tag{107}$$

και τον έχουμε γράψει και στην μορφή:

$$\sum_{j=1}^{k} \oint_{\boldsymbol{\sigma}_j} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{N}\,dA. \tag{108}$$

Στην δεύτερη μορφή του είδαμε το χωρίο D (το οποίο βρίσκεται στο xy-επίπεδο) ως επίπεδη επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$ μέσα στον xyz-χώρο και η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι η $(P,Q,0)$. Ο τύπος (108) μετεξελίχθηκε (με την ίδια μορφή) στον τύπο του Stokes, γενικεύοντας σε συναρτήσεις $\mathbf{f}=(P,Q,R)$ και σε μη-επίπεδες επιφάνειες.

Στην τρίτη μορφή του τύπου του Green δεν θα προσθέσουμε τρίτη διάσταση. Απλώς θα θεωρήσουμε ως διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^2$$

αυτήν που έχει τύπο

$$\mathbf{f}(x,y) = (Q(x,y), -P(x,y)), \qquad (x,y)\in D.$$

Τώρα υπολογίζουμε την *απόκλιση* της $\mathbf{f}$:

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial(-P)}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Έτσι η δεξιά μεριά του (107) γράφεται

$$\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)\,dxdy = \iint_D \nabla\cdot\mathbf{f}\,dA. \tag{109}$$

Τώρα θεωρούμε μια οποιαδήποτε από τις συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_j$ του D και, για απλούστευση, ας την πούμε $\boldsymbol{\sigma}$ (χωρίς δείκτη). Έστω $[a,b]$ το παραμετρικό διάστημα της $\boldsymbol{\sigma}$, οπότε

$$\boldsymbol{\sigma}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$$

και έστω

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t)), \qquad t\in[a,b].$$

Τώρα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\oint_{\boldsymbol{\sigma}}\Big(P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\Big) &= \int_a^b \Big(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(Q(x(t),y(t)),-P(x(t),y(t))\Big)\cdot(y'(t),-x'(t))\,dt \\
&= \int_a^b \mathbf{f}(x(t),y(t))\Big)\cdot(y'(t),-x'(t))\,dt \\
&= \int_a^b \mathbf{f}(x(t),y(t))\Big)\cdot\Big(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}},\frac{-x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\Big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt \\
&= \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t))\Big)\cdot\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t))\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt \\
&= \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{N}\,dS,
\end{aligned}
\tag{110}
$$

όπου με $\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ συμβολίσαμε το διάνυσμα στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ της καμπύλης με τύπο

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t))=\Big(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}},\frac{-x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\Big).$$

Τώρα θα δούμε τη σχέση ανάμεσα σ' αυτό το διάνυσμα και στο

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t))=\Big(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}},\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\Big)=\frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|},$$

το οποίο είναι το μοναδιαίο *εφαπτόμενο* διάνυσμα στην καμπύλη στο ίδιο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Έχουμε ήδη αναφέρει στην δέκατη εβδομάδα (αλλά με το σύμβολο $\mathbf{T}^*$ αντί του $\mathbf{N}$) ότι όταν έχουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{T}=(p,q)$, τότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{N}=(q,-p)$ είναι εκείνο που όταν το στρίψουμε αντι-ωρολογιακά (όπως κοιτάμε πάνω από το xy-επίπεδο) κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ θα ταυτιστεί με το $\mathbf{T}=(p,q)$. Με άλλα λόγια, *όταν στεκόμαστε όρθιοι πάνω στο xy-επίπεδο και η μύτη μας έχει την (οριζόντια) κατεύθυνση του* $\mathbf{T}$*, τότε το δεξί μας χέρι έχει την (οριζόντια) κατεύθυνση του* $\mathbf{N}$. Τώρα, στον τύπο του Gauss (107) η φορά διαγραφής της $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η θετική σε σχέση με το χωρίο D. Δηλαδή, όπως περπατάμε πάνω στην καμπύλη σύμφωνα με την φορά διαγραφής της, το δεξί μας χέρι *και επομένως το διάνυσμα* $\mathbf{N}$ έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική μεριά του D.

Έτσι, παίρνοντας στον (110) ως $\boldsymbol{\sigma}$ καθεμιά από τις $\boldsymbol{\sigma}_j$ και αθροίζοντας για $j=1,\ldots,k$, προκύπτει ότι η αριστερή μεριά του (107) γράφεται

$$\sum_{j=1}^k\oint_{\boldsymbol{\sigma}_j}\Big(P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\Big)=\sum_{j=1}^k\oint_{\boldsymbol{\sigma}_j}\mathbf{f}\cdot\mathbf{N}\,dS. \tag{111}$$

Άρα από τις (109) και (111), ο τύπος του Green γράφεται στην μορφή:

$$\sum_{j=1}^k\oint_{\boldsymbol{\sigma}_j}\mathbf{f}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_D\nabla\cdot\mathbf{f}\,dA. \tag{112}$$

Αν συγκρίνουμε τον τύπο του Green, σ' αυτήν την μορφή του, με τον τύπο του Gauss (105) θα δούμε ουσιαστικά μόνο ομοιότητες, πέρα από το ότι ο ένας έχει να κάνει με δύο διαστάσεις και ο άλλος με τρεις. Και στους δύο τύπους: ολοκληρώνουμε ως προς στοιχειώδες εμβαδόν dA στο D ή ως προς στοιχειώδη όγκο dV στο Ω την απόκλιση $\nabla\cdot\mathbf{f}$ μίας διανυσματικής συνάρτησης και ολοκληρώνουμε ως προς στοιχειώδες μήκος dS στις συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_j$ ή ως προς στοιχειώδες εμβαδόν dA στις συνοριακές επιφάνειες $\boldsymbol{\Sigma}_j$ το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{f}\cdot\mathbf{N}$ της συνάρτησης με τα κάθετα διανύσματα που κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά του χωρίου D ή Ω. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι:

Ο τύπος του Gauss είναι ένας τύπος Green για τρεις διαστάσεις και ο τύπος του Green είναι ένας τύπος Gauss για δύο διαστάσεις.

Κατόπιν, θα μελετήσουμε το *φυσικό περιεχόμενο των εννοιών της απόκλισης και του στροβιλισμού* μιας διανυσματικής συνάρτησης.

Έχουμε ήδη πει ότι αν η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ εκφράζει ένα *πεδίο δυνάμεων* στα σημεία του χώρου, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS$ εκφράζει το *έργο* που παράγουν αυτές οι δυνάμεις όταν μετακινούν ένα σωματίδιο πάνω στην καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι η διανυσματική συνάρτηση εκφράζει ένα *πεδίο ταχυτήτων* στα σημεία του χώρου και ας χρησιμοποιήσουμε και το ανάλογο σύμβολο $\mathbf{v} = (P, Q, R)$ αντί του $\mathbf{f}$. Τότε, αν θεωρήσουμε ένα σωματίδιο σε κάποιο σημείο της καμπύλης, η ταχύτητα με την οποία αυτό κινείται *πάνω* στην καμπύλη είναι ίση με την προβολή της ταχύτητάς του $\mathbf{v}$ στον χώρο πάνω στην εφαπτόμενη κατεύθυνση της καμπύλης, δηλαδή ίση με $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$, όπου $\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\|\boldsymbol{\sigma}'\|}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη. Επομένως, η (βαθμωτή) *ορμή* του σωματιδίου στην κατεύθυνση της κίνησής του είναι ίση με το γινόμενο της μάζας του με την ταχύτητά του $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Αν αντί ενός σωματιδίου θεωρήσουμε όλα τα σωματίδια που περιέχονται σε ένα πολύ μικρό κομμάτι της καμπύλης μήκους dS, τότε η μάζα τους είναι ίση με $dm = \rho dS$, όπου ρ είναι η γραμμική πυκνότητα της μάζας των σωματιδίων και, για απλούστευση, θα την θεωρήσουμε σταθερή και ίση με 1. Άρα η συνολική (βαθμωτή) ορμή των σωματιδίων που περιέχονται σε ένα πολύ μικρό κομμάτι της καμπύλης μήκους dS είναι ίση με $dm\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, dS$. Αν αθροίσουμε τις ορμές που αντιστοιχούν σε πολύ μικρά κομμάτια της καμπύλης, συμπεραίνουμε ότι η συνολική (βαθμωτή) ορμή των σωματιδίων που κινούνται κατά μήκος της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$ ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, dS.$$

Έτσι, αν η ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε κάθε σημείο της καμπύλης είναι *κάθετη* στο $\mathbf{T}$, δηλαδή τα σωματίδια τείνουν να κινηθούν κάθετα προς την καμπύλη, τότε έχουμε $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, dS = \int_{\boldsymbol{\sigma}} 0\, dS = 0$ για την συνολική (βαθμωτή) ορμή τους κατά μήκος της καμπύλης. Αν η ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε κάθε σημείο της καμπύλης έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{T}$, δηλαδή τα σωματίδια τείνουν να κινηθούν κατά την φορά διαγραφής της καμπύλης, τότε έχουμε $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, dS = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \|\mathbf{v}\|\, dS > 0$ για την συνολική (βαθμωτή) ορμή τους κατά μήκος της καμπύλης. Τέλος, αν η ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε κάθε σημείο της καμπύλης έχει αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με το $\mathbf{T}$, δηλαδή τα σωματίδια τείνουν να κινηθούν με φορά αντίθετη με την φορά διαγραφής της καμπύλης, τότε έχουμε $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, dS = -\int_{\boldsymbol{\sigma}} \|\mathbf{v}\|\, dS < 0$ για την συνολική (βαθμωτή) ορμή τους κατά μήκος της καμπύλης.

Γενικά, όταν έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}$, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS$$

ονομάζεται **κυκλοφορία** του διανυσματικού πεδίου κατά μήκος της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$. Έτσι, η κυκλοφορία πεδίου δυνάμεων εκφράζει έργο και η κυκλοφορία πεδίου ταχυτήτων εκφράζει ορμή.

Τώρα ας θεωρήσουμε ένα σημείο M του χώρου και ένα πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{v}$ στα σημεία του χώρου γύρω από το M. Θεωρούμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{N}$ στο σημείο M και μια πάρα πολύ μικρή επίπεδη επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$ η οποία περιέχει το σημείο M και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\mathbf{N}$. Επειδή η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι πολύ μικρή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο στροβιλισμός $\nabla \times \mathbf{v}$ του πεδίου ταχυτήτων είναι σταθερός στα σημεία της επιφάνειας και ίσος με την τιμή του στο σημείο M, οπότε

$$\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{N}\, dA = \big((\nabla \times \mathbf{v})(M) \cdot \mathbf{N}\big) \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} dA = \big((\nabla \times \mathbf{v})(M) \cdot \mathbf{N}\big) A(\boldsymbol{\Sigma}),$$

όπου $A(\boldsymbol{\Sigma})$ είναι το εμβαδόν της μικρής επιφάνειας $\boldsymbol{\Sigma}$. Τώρα, από τον τύπο του Stokes έχουμε ότι

$$\big((\nabla \times \mathbf{v})(M) \cdot \mathbf{N}\big) A(\boldsymbol{\Sigma}) = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{N}\, dA = \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, dS,$$

δηλαδή

$$(\nabla \times \mathbf{v})(M) \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{A(\mathbf{\Sigma})} \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, dS, \tag{113}$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή καμπύλη της $\mathbf{\Sigma}$. Παρατηρούμε ότι η $\boldsymbol{\sigma}$ περιστρέφεται γύρω από το $\mathbf{N}$ πάνω στο κάθετο επίπεδο του $\mathbf{N}$. Έτσι ο τύπος (113) μας αποκαλύπτει το φυσικό περιεχόμενο του στροβιλισμού ενός πεδίου ταχυτήτων:

Ο στροβιλισμός του πεδίου ταχυτήτων $\mathbf{v}$ *σε ένα σημείο* M *του χώρου είναι ένα διάνυσμα με την εξής ιδιότητα: η προβολή του σε μια οποιαδήποτε κατεύθυνση* $\mathbf{N}$ *ισούται με την κυκλοφορία (δηλαδή, την ορμή) του* $\mathbf{v}$ *περιστροφικά και με την θετική φορά γύρω από το* $\mathbf{N}$ *πάνω στην συνοριακή καμπύλη μιας μικρής επιφάνειας κάθετης στο* $\mathbf{N}$ *ανά μονάδα επιφανείας.*

Και ξαναδιακρίνουμε τις τρεις περιπτώσεις, δύο ακραίες και μία ενδιάμεση. Αν η ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε κάθε σημείο της καμπύλης είναι *κάθετη* στο $\mathbf{T}$, δηλαδή τα σωματίδια τείνουν να κινηθούν κάθετα προς την καμπύλη και άρα *όχι περιστροφικά γύρω από το* $\mathbf{N}$, τότε έχουμε

$$(\nabla \times \mathbf{v})(M) \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{A(\mathbf{\Sigma})} \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, dS = 0.$$

Αν η ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε κάθε σημείο της καμπύλης έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{T}$, δηλαδή τα σωματίδια τείνουν να κινηθούν κατά την φορά διαγραφής της καμπύλης και άρα περιστροφικά και με την θετική φορά γύρω από το $\mathbf{N}$, τότε έχουμε

$$(\nabla \times \mathbf{v})(M) \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{A(\mathbf{\Sigma})} \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, dS = \frac{1}{A(\mathbf{\Sigma})} \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \|\mathbf{v}\|\, dS > 0.$$

Τέλος, αν η ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε κάθε σημείο της καμπύλης έχει αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με το $\mathbf{T}$, δηλαδή τα σωματίδια τείνουν να κινηθούν με φορά αντίθετη με την φορά διαγραφής της καμπύλης και άρα περιστροφικά και με την αρνητική φορά γύρω από το $\mathbf{N}$, τότε έχουμε

$$(\nabla \times \mathbf{v})(M) \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{A(\mathbf{\Sigma})} \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, dS = -\frac{1}{A(\mathbf{\Sigma})} \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \|\mathbf{v}\|\, dS < 0.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι ο στροβιλισμός $\nabla \times \mathbf{v}$ του πεδίου ταχυτήτων $\mathbf{v}$ αποτελεί, δικαιολογώντας την ονομασία του, ένα μέτρο περιστροφικής κίνησης (μηδενικής, θετικής, αρνητικής) των διανυσμάτων $\mathbf{v}$ γύρω από διανύσματα $\mathbf{N}$.

Τώρα θα δούμε την φυσική σημασία της απόκλισης διανυσματικού *πεδίου ταχυτήτων*. Θεωρούμε μια επιφάνεια $\mathbf{\Sigma}$ και σωματίδια τα οποία διαπερνούν την επιφάνεια με ταχύτητα $\mathbf{v}$ η οποία εξαρτάται από το σημείο της επιφάνειας. Αν $\mathbf{N}$ είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στα σημεία της επιφάνειας, τότε η (βαθμωτή) ταχύτητα με την οποία το κάθε σωματίδιο διαπερνά *κάθετα* την επιφάνεια στην κατεύθυνση του $\mathbf{N}$ είναι ίση με $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}$. Αν θεωρήσουμε ένα πολύ μικρό κομμάτι της επιφάνειας $\mathbf{\Sigma}$ το οποίο έχει εμβαδό dA, τότε τα σωματίδια τα οποία θα διαπεράσουν αυτό το κομμάτι σε μια μικρή χρονική διάρκεια dt σχηματίζουν μια "ορθογώνια πλάκα" εμβαδού dA και πλάτους $ds = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\, dt$. Ο όγκος αυτής της "πλάκας" είναι ίσος με $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\, dAdt$. Αν αθροίσουμε αυτούς τους όγκους που αντιστοιχούν στα διάφορα μικρά κομμάτια της επιφάνειας, προκύπτει ο συνολικός όγκος των σωματιδίων που θα διαπεράσουν την επιφάνεια $\mathbf{\Sigma}$ στην χρονική διάρκεια dt:

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\, dAdt = dt \iint_{\mathbf{\Sigma}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\, dA.$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταφοράς όγκου σωματιδίων διαμέσου της επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου είναι ίσος με

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\, dA.$$

Γενικά, όταν έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}$, το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathbf{\Sigma}} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{N})\, dA$$

ονομάζεται **ροή** του διανυσματικού πεδίου διαμέσου της επιφάνειας $\mathbf{\Sigma}$. Έτσι η ροή πεδίου ταχυτήτων εκφράζει ρυθμό μεταφοράς όγκου.

Τώρα ας θεωρήσουμε ένα σημείο M του χώρου και ένα πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{v}$ στα σημεία του χώρου γύρω από το M. Θεωρούμε ένα πολύ μικρο χωρίο Ω το οποίο περιέχει το σημείο M. Επειδή το Ω είναι πολύ μικρό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{v}$ του πεδίου ταχυτήτων είναι σταθερή στα σημεία του χωρίου και ίση με την τιμή της στο σημείο M, οπότε

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}\, dV = (\nabla \cdot \mathbf{v})(M) \iiint_{\Omega} dV = (\nabla \cdot \mathbf{v})(M)\, V(\Omega),$$

όπου $V(\Omega)$ είναι ο όγκος του μικρού χωρίου Ω. Τώρα, από τον τύπο του Gauss έχουμε ότι

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(M)\, V(\Omega) = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}\, dV = \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}\, dA,$$

δηλαδή

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(M) = \frac{1}{V(\Omega)} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}\, dA, \tag{114}$$

όπου $\mathbf{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια του Ω. Παρατηρούμε ότι η κλειστή επιφάνεια $\mathbf{\Sigma}$ περιβάλλει το σημείο M. Από τον τύπο (114) προκύπτει το φυσικό περιεχόμενο της απόκλισης του πεδίου ταχυτήτων:

Η απόκλιση του πεδίου ταχυτήτων $\mathbf{v}$ *σε ένα σημείο M του χώρου ισούται με την ροή του* $\mathbf{v}$ *διαμέσου της κλειστής συνοριακής επιφάνειας ενός μικρού χωρίου το οποίο περιβάλλει το M ανά μονάδα όγκου.*

Πάλι έχουμε τρεις περιπτώσεις, δύο ακραίες και μία ενδιάμεση. Για απλούστευση, ας θεωρήσουμε ότι το χωρίο Ω είναι μια μικρή μπάλα κέντρου M, οπότε τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ στην συνοριακή σφαίρα διέρχονται όλα από το M και απομακρύνονται από αυτό. Αν η ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε κάθε σημείο της επιφάνειας είναι *κάθετη* στο $\mathbf{N}$, δηλαδή τα σωματίδια τείνουν να κινηθούν πάνω στην επιφάνεια και άρα *όχι προς ή από το M*, τότε έχουμε

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(M) = \frac{1}{V(\Omega)} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}\, dA = 0.$$

Αν η ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε κάθε σημείο της επιφάνειας έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{N}$, δηλαδή τα σωματίδια τείνουν να κινηθούν μακρυά από το M, τότε έχουμε

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(M) = \frac{1}{V(\Omega)} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}\, dA = \frac{1}{V(\Omega)} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{\Sigma}} \|\mathbf{v}\|\, dA > 0.$$

Τέλος, αν η ταχύτητα $\mathbf{v}$ σε κάθε σημείο της επιφάνειας έχει την αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με το $\mathbf{N}$, δηλαδή τα σωματίδια τείνουν να κινηθούν προς το M, τότε έχουμε

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(M) = \frac{1}{V(\Omega)} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}\, dA = -\frac{1}{V(\Omega)} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{\Sigma}} \|\mathbf{v}\|\, dA < 0.$$

Άρα η απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{v}$ του πεδίου ταχυτήτων $\mathbf{v}$ σε ένα σημείο M αποτελεί, δικαιολογώντας την ονομασία της, ένα μέτρο απομάκρυνσης (μηδενικής, θετικής, αρνητικής) των διανυσμάτων $\mathbf{v}$ από το σημείο M. Στην περίπτωση που έχουμε $(\nabla \cdot \mathbf{v})(M) > 0$ λέμε ότι το M αποτελεί *πηγή* (σωματιδίων) ενώ στην περίπτωση που έχουμε $(\nabla \cdot \mathbf{v})(M) < 0$ λέμε ότι το M αποτελεί *καταβόθρα* (σωματιδίων).

Τώρα φτάνουμε στο τελευταίο μέρος του μαθήματος. Το θέμα του είναι τα λεγόμενα *συντηρητικά πεδία*. Κατ' αρχάς θα μιλήσουμε για διανυσματικά πεδία στις δύο διαστάσεις.

Θεωρούμε ένα *ανοικτό* και *συνεκτικό* χωρίο U στο xy-επίπεδο. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο U ονομάζεται ανοικτό αν δεν περιέχει κανένα από τα συνοριακά σημεία του. Επίσης, ένα ανοικτό σύνολο U ονομάζεται συνεκτικό αν κάθε δύο σημεία του μπορούν να ενωθούν με καμπύλη η οποία βρίσκεται μέσα στο U. Θεωρούμε και ένα διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

ορισμένο στα σημεία (x,y) του χωρίου U.

Θα λέμε ότι το $\mathbf{f}$ είναι **συντηρητικό** (στο χωρίο U) αν ισχύει

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS = \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

για *κάθε* κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ η οποία βρίσκεται μέσα στο U. Με άλλα λόγια, το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό στο U αν η κυκλοφορία του σε κάθε κλειστή καμπύλη μέσα στο U είναι μηδενική.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει δύο ισοδύναμες συνθήκες για να είναι ένα διανυσματικό πεδίο συντηρητικό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *Έστω ανοικτό και συνεκτικό χωρίο U και διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f} = (P,Q)$ στο U. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(i) Το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό στο U.
(ii) Ισχύει

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}_1} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS = \int_{\boldsymbol{\sigma}_2} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS$$

για κάθε δύο καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1$ και $\boldsymbol{\sigma}_2$ μέσα στο U με τα ίδια άκρα.
(iii) Υπάρχει βαθμωτό πεδίο $\phi(x,y)$ ορισμένο στα σημεία (x,y) του U τέτοιο ώστε

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

για κάθε (x,y) στο U.

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό στο U. Θεωρούμε δύο τυχαίες καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1$ και $\boldsymbol{\sigma}_2$ μέσα στο U με τα ίδια άκρα. Θεωρούμε και την καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ η οποία είναι συγκόλληση (με αυτήν την σειρά) της $\boldsymbol{\sigma}_1$ και της αντίθετης της $\boldsymbol{\sigma}_2$. Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι κλειστή καμπύλη μέσα στο U και, επειδή το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό στο U πρέπει να ισχύει

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS = 0.$$

Όμως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ίσο με το άθροισμα του επικαμπυλίου ολοκληρώματος στην $\boldsymbol{\sigma}_1$ και του επικαμπυλίου ολοκληρώματος στην αντίθετη της $\boldsymbol{\sigma}_2$ και άρα ίσο με την διαφορά του επικαμπυλίου ολοκληρώματος στην $\boldsymbol{\sigma}_1$ και του επικαμπυλίου ολοκληρώματος στην $\boldsymbol{\sigma}_2$. Άρα η τελευταία σχέση γίνεται

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}_1} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS - \int_{\boldsymbol{\sigma}_2} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS = 0$$

και καταλήγουμε στο (ii).
(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση ϕ στο U ώστε να ισχύει $\frac{\partial\phi}{\partial x} = P$ και $\frac{\partial\phi}{\partial y} = Q$ στο U. Παίρνουμε μια οποιαδήποτε καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ μέσα στο U *όχι αναγκαστικά κλειστή*

και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS &= \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t))\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)\,dt = \int_a^b \mathbf{f}(x(t),y(t))\cdot(x'(t),y'(t))\,dt \\
&= \int_a^b \Big(P(x(t),y(t)),Q(x(t),y(t))\Big)\cdot(x'(t),y'(t))\,dt \\
&= \int_a^b \Big(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)+\frac{\partial\phi}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(x(t),y(t))\,dt = \phi(x(b),y(b))-\phi(x(a),y(a)) \\
&= \phi(\boldsymbol{\sigma}(b))-\phi(\boldsymbol{\sigma}(a)).
\end{aligned}$$

Τώρα, αν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι κλειστή, δηλαδή αν $\boldsymbol{\sigma}(b)=\boldsymbol{\sigma}(a)$, συνεπάγεται ότι $\int_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS=0$ και καταλήξαμε στο (i).
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτουμε ότι ισχύει $\int_{\boldsymbol{\sigma}_1}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS=\int_{\boldsymbol{\sigma}_2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS$ για κάθε δύο καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1$ και $\boldsymbol{\sigma}_2$ μέσα στο U με τα ίδια άκρα και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση ϕ στο U ώστε να ισχύει $\frac{\partial\phi}{\partial x}=P$ και $\frac{\partial\phi}{\partial y}=Q$ στο U.
Παίρνουμε ένα σημείο (x_0,y_0) στο U και το κρατάμε σταθερό. Κατόπιν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο (x,y) στο U και θα ορίσουμε την τιμή της ζητούμενης ϕ στο (x,y):

$$\phi(x,y)=\int_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS,$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι μια οποιαδήποτε καμπύλη μέσα στο U η οποία ενώνει το (x_0,y_0) με το (x,y). Τώρα, υπάρχουν άπειρες τέτοιες καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}$ μέσα στο U που ενώνουν το (x_0,y_0) με το (x,y). Αλλά, λόγω της υπόθεσής μας, η αριθμητική τιμή του $\int_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS$ είναι η ίδια για όλες αυτές τις καμπύλες αφού όλες έχουν τα ίδια άκρα: το (x_0,y_0) και το (x,y). Άρα η τιμή $\phi(x,y)$ στο σημείο (x,y) εξαρτάται μόνο από το σημείο (x,y) και άρα έχουμε ορίσει καλώς μια συνάρτηση ϕ σε κάθε σημείο του U.
Μένει να αποδείξουμε ότι η ϕ ικανοποιεί τις $\frac{\partial\phi}{\partial x}=P$ και $\frac{\partial\phi}{\partial y}=Q$ σε κάθε σημείο (x,y) του U.
Έστω τυχαίο $(x,y)\in U$. Παίρνουμε και ένα πολύ κοντινό σημείο $(x+h,y)$ στο U. Τότε

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h,y)-\phi(x,y)}{h}.$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές $\phi(x,y)$ και $\phi(x+h,y)$ θεωρούμε μια καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ μέσα στο U η οποία ενώνει το (x_0,y_0) με το (x,y) και άρα έχουμε

$$\phi(x,y)=\int_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS.$$

Τώρα θεωρούμε και την ευθύγραμμη (οριζόντια) καμπύλη $\boldsymbol{\rho}$ που ενώνει το (x,y) με το $(x+h,y)$. Τότε η συγκόλληση της $\boldsymbol{\sigma}$ και της $\boldsymbol{\rho}$ είναι καμπύλη μέσα στο U η οποία ενώνει το (x_0,y_0) με το $(x+h,y)$ και άρα

$$\phi(x+h,y)=\int_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS+\int_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS.$$

Επομένως, θεωρώντας την παραμετρικοποίηση $\boldsymbol{\rho}(t)=(x+t,y)$, $t\in[0,h]$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\phi(x+h,y)-\phi(x,y) &= \int_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS = \int_0^h \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t))\cdot\boldsymbol{\rho}'(t)\,dt \\
&= \int_0^h \mathbf{f}(x+t,y)\cdot(1,0)\,dt = \int_0^h \Big(P(x+t,y),Q(x+t,y)\Big)\cdot(1,0)\,dt \\
&= \int_0^h P(x+t,y)\,dt.
\end{aligned}$$

Άρα
$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h,y)-\phi(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h P(x+t,y)\,dt=P(x,y).$$
Τώρα παίρνουμε ένα σημείο $(x,y+h)$ στο U πολύ κοντά στο (x,y). Τότε
$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x,y+h)-\phi(x,y)}{h}.$$
Πάλι θεωρούμε μια καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ μέσα στο U η οποία ενώνει το (x_0,y_0) με το (x,y) και άρα έχουμε
$$\phi(x,y)=\int_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS.$$
Τώρα θεωρούμε την ευθύγραμμη (κατακόρυφη) καμπύλη $\boldsymbol{\rho}$ που ενώνει το (x,y) με το $(x,y+h)$. Τότε η συγκόλληση της $\boldsymbol{\sigma}$ και της $\boldsymbol{\rho}$ είναι καμπύλη μέσα στο U η οποία ενώνει το (x_0,y_0) με το $(x,y+h)$ και άρα
$$\phi(x,y+h)=\int_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS+\int_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS.$$
Θεωρώντας την παραμετρικοποίηση $\boldsymbol{\rho}(t)=(x,y+t)$, $t\in[0,h]$, έχουμε
$$\begin{aligned}\phi(x,y+h)-\phi(x,y)&=\int_{\boldsymbol{\rho}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS=\int_0^h\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t))\cdot\boldsymbol{\rho}'(t)\,dt\\&=\int_0^h\mathbf{f}(x,y+t)\cdot(0,1)\,dt=\int_0^h\Big(P(x,y+t),Q(x,y+t)\Big)\cdot(0,1)\,dt\\&=\int_0^h Q(x+t,y)\,dt.\end{aligned}$$
Άρα
$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x,y+h)-\phi(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h Q(x,y+t)\,dt=Q(x,y).$$
Έτσι αποδείξαμε ότι η ϕ ικανοποιεί τις $\frac{\partial\phi}{\partial x}=P$ και $\frac{\partial\phi}{\partial y}=Q$ στο U. □

Όταν έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}=(P,Q)$ και ένα βαθμωτό πεδίο ϕ στο ανοικτό χωρίο U και ισχύει
$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=P,\qquad\frac{\partial\phi}{\partial y}=Q$$
ή, ισοδύναμα,
$$\nabla\phi=\mathbf{f}$$
στο U, τότε λέμε ότι το ϕ είναι **πεδίο δυναμικού** για το $\mathbf{f}$.

Αξίζει να γράψουμε ως αυτόνομο συμπέρασμα αυτό που προέκυψε μέσα στην απόδειξη της Πρότασης 1.

Αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}$ *έχει πεδίο δυναμικού* ϕ *στο ανοικτό χωρίο* U*, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του* $\mathbf{f}$ *σε κάθε καμπύλη* $\boldsymbol{\sigma}$ *μέσα στο* U *ισούται με την διαφορά των τιμών του* ϕ *στα άκρα της καμπύλης:*
$$\int_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS=\phi(\boldsymbol{\sigma}(b))-\phi(\boldsymbol{\sigma}(a)).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Έστω ανοικτό και συνεκτικό χωρίο* U *και διανυσματικό πεδίο* $\mathbf{f}=(P,Q)$ *στο* U*. Αν το* $\mathbf{f}$ *είναι συντηρητικό στο* U*, τότε ισχύει*
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\tag{115}$$
στο U*.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό στο U. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι υπάρχει πεδίο δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$ στο U. Τότε

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

και

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}.$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις συνεπάγεται $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. □

Σχόλιο. Στην Πρόταση 1 έχουμε δύο ισοδύναμες συνθήκες για να είναι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f} = (P, Q)$ συντηρητικό. Στην Πρόταση 2 **δεν** έχουμε ισοδύναμη συνθήκη για να είναι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f} = (P, Q)$ συντηρητικό: *έχουμε αναγκαία συνθήκη αλλά όχι ικανή*. Η συνθήκη αυτή είναι η $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Η Πρόταση 2 λέει ότι, αν το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό, τότε ισχύει $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Αλλά, αν ισχύει $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ **δεν** συνεπάγεται ότι το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό.

12η εβδομάδα.

Έστω μια κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ στο xy-επίπεδο: δηλαδή, αν ο τύπος της είναι $\boldsymbol{\sigma}(t)$, $t \in [a, b]$, έχουμε $\boldsymbol{\sigma}(a) = \boldsymbol{\sigma}(b)$. Η $\boldsymbol{\sigma}$ λέγεται **απλή** όταν δεν "αυτοτέμνεται". Αυτό σημαίνει ότι ισχύει $\boldsymbol{\sigma}(t_1) = \boldsymbol{\sigma}(t_2)$ με $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ μόνο όταν $t_1 = a$ και $t_2 = b$.

Αποδεικνύεται (η μαθηματικά αυστηρή απόδειξη είναι πολύ δύσκολη, αλλά το γεγονός είναι διαισθητικά σχεδόν προφανές) ότι μία απλή, κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ χωρίζει το xy-επίπεδο σε δύο ανοικτά και συνεκτικά χωρία: το ένα από αυτά είναι φραγμένο και περιλαμβάνει τα σημεία τα οποία "περικυκλώνει" η καμπύλη και λέγεται **εσωτερικό χωρίο** της καμπύλης, ενώ το δεύτερο χωρίο δεν είναι φραγμένο και περιλαμβάνει τα σημεία τα οποία δεν "περικυκλώνει" η καμπύλη και λέγεται **εξωτερικό χωρίο** της καμπύλης. Τα σημεία της ίδιας της καμπύλης είναι τα συνοριακά σημεία και των δύο αυτών χωρίων.
Για παράδειγμα, ο κύκλος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $r > 0$ έχει ως εσωτερικό χωρίο τον ανοικτό δίσκο $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < r^2\}$ και εξωτερικό χωρίο το $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 > r^2\}$.

Τώρα, έστω U ένα ανοικτό και συνεκτικό χωρίο στο xy-επίπεδο. Το U λέγεται **απλά συνεκτικό** αν έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε απλή κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ η οποία περιέχεται στο U το εσωτερικό χωρίο της $\boldsymbol{\sigma}$ περιέχεται κι αυτό στο U.
Για παράδειγμα, ένας ανοικτός δίσκος, ένα ανοικτό παραλληλόγραμμο, ένα ανοικτό ημιεπίπεδο, ολόκληρο το xy-επίπεδο, το σύνολο που προκύπτει αν από το xy-επίπεδο αφαιρέσουμε μια ημιευθεία είναι όλα απλά συνεκτικά σύνολα. Αν θεωρήσουμε έναν ανοικτό δακτύλιο, δηλαδή έναν ανοικτό δίσκο κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας r_2 από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει έναν μικρότερο ομόκεντρο κλειστό δίσκο ακτίνας r_1 με $r_1 < r_2$, τότε το σύνολο αυτό δεν είναι απλά συνεκτικό. Πράγματι, αν θεωρήσουμε έναν κύκλο (δηλαδή απλή κλειστή καμπύλη) με το ίδιο κέντρο και ακτίνα r με $r_1 < r < r_2$, τότε ο κύκλος αυτός περιέχεται στον δακτύλιο, αλλά το εσωτερικό του χωρίο δεν περιέχεται στον δακτύλιο. Γενικότερα, ένα απλό διαισθητικό κριτήριο για να είναι ένα ανοικτό συνεκτικό χωρίο U απλά συνεκτικό είναι το να μην έχει "τρύπες".

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. *Έστω ανοικτό και συνεκτικό χωρίο U το οποίο είναι απλά συνεκτικό και διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f} = (P, Q)$ στο U. Αν ισχύει*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

στο U, τότε το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό στο U.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ισχύει $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ στο U.
Παίρνουμε τυχαία απλή κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ στο U. Επειδή το U είναι απλά συνεκτικό, το εσωτερικό χωρίο D της $\boldsymbol{\sigma}$ περιέχεται στο U και άρα ισχύει $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ στο D. Τώρα, από τον τύπο του Green για το χωρίο D και την συνοριακή του καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ έχουμε

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} \, dS = \pm \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \Big) dxdy = \pm \iint_D 0 \, dxdy = 0.$$

Αποδείξαμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\mathbf{f}$ σε κάθε *απλή* κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ στο U είναι ίσο με 0.
Τώρα έστω τυχαία κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ στο U, όχι απλή. Θεωρώντας τα σημεία στα οποία η $\boldsymbol{\sigma}$

αυτοτέμνεται, μπορούμε να βρούμε απλές κλειστές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$ στο U έτσι ώστε

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = \oint_{\boldsymbol{\sigma}_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS + \cdots + \oint_{\boldsymbol{\sigma}_k} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS.$$

Σύμφωνα με αυτό που αποδείξαμε, καθένα από τα $\oint_{\boldsymbol{\sigma}_j} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS$ είναι ίσο με 0 και άρα

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = 0.$$

Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\mathbf{f}$ σε κάθε κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ στο U είναι ίσο με 0 και επομένως το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό πεδίο. □

Ένα πρώτο παράδειγμα. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$$

και θα δούμε αν είναι συντηρητικό και, αν είναι, θα βρούμε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$.
Κατ' αρχάς ελέγχουμε αν ισχύει η αναγκαία συνθήκη (115) για να είναι το διανυσματικό πεδίο μας συντηρητικό:

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = 2y$$

και άρα ισχύει $\frac{\partial(2xy)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}$, δηλαδή η (115). *Αν δεν ίσχυε η (115) θα συμπεραίναμε ότι το* $\mathbf{f}$ *δεν είναι συντηρητικό.* Τώρα, όμως, που ισχύει η (115) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό, διότι η (115) δεν είναι ικανή συνθήκη. Για να είναι ικανή συνθήκη η (115) πρέπει, βάσει της Πρότασης 3, να ελέγξουμε αν το χωρίο U στο οποίο είναι ορισμένο το $\mathbf{f}$ είναι απλά συνεκτικό. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το U είναι ολόκληρο το xy-επίπεδο και άρα είναι απλά συνεκτικό. Επομένως, αφού ισχύει η (115), το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό.
Ας βρούμε τώρα ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$, η ύπαρξη του οποίου είναι εγγυημένη από την Πρόταση 1. Πρέπει να βρούμε μία αριθμητική συνάρτηση ϕ στο xy-επίπεδο ώστε να ισχύει

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = x^2 + y^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = 2xy \end{cases} \tag{116}$$

για κάθε (x, y). Από την πρώτη σχέση του συστήματος (116) παίρνουμε

$$\phi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + c(y), \tag{117}$$

όπου $c(y)$ είναι μια σταθερά σε σχέση με το x αλλά που μπορεί να εξαρτάται από το y: δηλαδή, το $c(y)$ είναι συνάρτηση του y. Τώρα χρησιμοποιούμε την (117) στην δεύτερη σχέση του συστήματος (116) και παίρνουμε

$$2xy + c'(y) = 2xy$$

ή, ισοδύναμα,

$$c'(y) = 0$$

για κάθε y. Συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $c(y)$ είναι μία αυθαίρετη σταθερά: $c(y) = c$. Άρα, σε συνδυασμό με την (117), βλέπουμε ότι έχουμε άπειρες λύσεις:

$$\phi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Και ένα δεύτερο παράδειγμα. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{f}(x,y) = \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Big)$$

και θα δούμε αν είναι συντηρητικό και, αν είναι, θα βρούμε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$.
Πάλι ξεκινάμε ελέγχοντας αν ισχύει η αναγκαία συνθήκη (115) για να είναι το διανυσματικό πεδίο συντηρητικό:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

και άρα ισχύει η (115). *Αν δεν ίσχυε η (115) θα συμπεραίναμε ότι το* $\mathbf{f}$ *δεν είναι συντηρητικό*. Και πάλι, όμως, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό, διότι η (115) δεν είναι ικανή συνθήκη. Για να είναι ικανή συνθήκη η (115) πρέπει να ελέγξουμε αν το χωρίο U στο οποίο είναι ορισμένο το $\mathbf{f}$ είναι απλά συνεκτικό. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το U είναι το xy-επίπεδο εκτός του σημείου $(0,0)$ και άρα *δεν είναι απλά συνεκτικό*. Άρα και πάλι δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό. Επειδή το χωρίο μας έχει "τρύπα" στο σημείο $(0,0)$ στο οποίο δεν ορίζεται το $\mathbf{f}$, υποψιαζόμαστε ότι μπορεί να υπάρχει κάποια απλή κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ η οποία περιστρέφεται γύρω από το $(0,0)$ και για την οποία ισχύει $\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \neq 0$. Αυτό θα μας κάνει να συμπεράνουμε ότι το $\mathbf{f}$ δεν είναι συντηρητικό. Δοκιμάζουμε την απλούστερη τέτοια καμπύλη: τον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα 1, ο οποίος έχει παραμετρικοποίηση

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t))\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\cos t,\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\Big(-\frac{\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\Big)\cdot(-\sin t,\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

Άρα, αφού βρήκαμε έστω και μία κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ στο χωρίο U με $\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \neq 0$, το $\mathbf{f}$ δεν είναι συντηρητικό.
Τώρα δεν έχει νόημα να ψάξουμε να βρούμε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$, αφού η Πρόταση 1 λέει ότι η ύπαρξη πεδίου δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$ είναι *ισοδύναμη* με το να είναι το $\mathbf{f}$ συντηρητικό. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο πεδίο δυναμικού ϕ.

Συνεχίζουμε με διανυσματικά πεδία στις τρεις διαστάσεις.

Θεωρούμε πάλι ένα *ανοικτό* και *συνεκτικό* χωρίο U στον xyz-χώρο και ένα διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

ορισμένο στα σημεία (x,y,z) του χωρίου U.

Θα λέμε ότι το $\mathbf{f}$ είναι **συντηρητικό** (στο χωρίο U) αν ισχύει

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS = \oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

για *κάθε* κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ η οποία βρίσκεται μέσα στο U. Δηλαδή το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό στο U αν η κυκλοφορία του σε κάθε κλειστή καμπύλη μέσα στο U είναι μηδενική. Με άλλα λόγια, ο ορισμός του συντηρητικού πεδίου στις τρεις διαστάσεις είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του συντηρητικού πεδίου στις δύο διαστάσεις.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει δύο ισοδύναμες συνθήκες για να είναι ένα διανυσματικό πεδίο συντηρητικό. Η πρόταση είναι ανάλογη Πρότασης 1 για δύο διαστάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. *Έστω ανοικτό και συνεκτικό χωρίο U και διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ στο U. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(i) Το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό στο U.
(ii) Ισχύει

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = \int_{\boldsymbol{\sigma}_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS$$

για κάθε δύο καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1$ και $\boldsymbol{\sigma}_2$ μέσα στο U με τα ίδια άκρα.
(iii) Υπάρχει βαθμωτό πεδίο $\phi(x,y,z)$ ορισμένο στα σημεία (x,y,z) του U τέτοιο ώστε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z), \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z), \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z).$$

για κάθε (x,y,z) στο U.

Απόδειξη. (i)$\Rightarrow$(ii). Λέξη προς λέξη αντιγραφή από το αντίστοιχο μέρος της Πρότασης 1.
(iii)$\Rightarrow$(i). Εδώ θα κάνουμε τις προφανείς αλλαγές. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση ϕ στο U ώστε να ισχύει $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$ και $\frac{\partial \phi}{\partial z} = R$ στο U. Παίρνουμε μια οποιαδήποτε καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ μέσα στο U *όχι αναγκαστικά κλειστή* και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS &= \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt = \int_a^b \mathbf{f}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt \\
&= \int_a^b \Big(P(x(t),y(t),z(t)), Q(x(t),y(t),z(t)), R(x(t),y(t),z(t))\Big) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt \\
&= \int_a^b \Big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\Big)\, dt \\
&= \int_a^b \Big(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))x'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))y'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))z'(t)\Big)\, dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(x(t),y(t),z(t))\, dt = \phi(x(b),y(b),z(b)) - \phi(x(a),y(a),z(a)) \\
&= \phi(\boldsymbol{\sigma}(b)) - \phi(\boldsymbol{\sigma}(a)).
\end{aligned}$$

Τώρα, αν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι κλειστή, δηλαδή αν $\boldsymbol{\sigma}(b) = \boldsymbol{\sigma}(a)$, συνεπάγεται ότι $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = 0$ και καταλήξαμε στο (i).
(ii)$\Rightarrow$(iii). Πάλι κάνουμε τις προφανείς αλλαγές από την ανάλογη πρόταση στις δύο διαστάσεις. Θεωρούμε ότι ισχύει $\int_{\boldsymbol{\sigma}_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = \int_{\boldsymbol{\sigma}_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS$ για κάθε δύο καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1$ και $\boldsymbol{\sigma}_2$ στο U με τα ίδια άκρα και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση ϕ στο U ώστε να ισχύει $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$ και $\frac{\partial \phi}{\partial z} = R$ στο U.
Παίρνουμε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) στο U και το κρατάμε σταθερό. Κατόπιν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο (x,y,z) στο U και θα ορίσουμε την τιμή της ζητούμενης ϕ στο (x,y,z):

$$\phi(x,y,z) = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS,$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι οποιαδήποτε καμπύλη στο U η οποία ενώνει το (x_0, y_0, z_0) με το (x,y,z). Υπάρχουν άπειρες καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}$ μέσα στο U που ενώνουν το (x_0, y_0, z_0) με το (x,y,z). Αλλά, λόγω της υπόθεσής μας, η αριθμητική τιμή του $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS$ είναι η ίδια για όλες αυτές τις καμπύλες αφού όλες έχουν τα ίδια άκρα: το (x_0, y_0, z_0) και το (x,y,z). Άρα η τιμή $\phi(x,y,z)$ στο σημείο (x,y,z) εξαρτάται μόνο από το σημείο (x,y,z) και άρα έχουμε ορίσει καλώς μια συνάρτηση ϕ σε κάθε σημείο του U. Μένει να αποδείξουμε ότι η ϕ ικανοποιεί τις $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$ και $\frac{\partial \phi}{\partial z} = R$ σε κάθε σημείο (x,y,z) του U.
Έστω τυχαίο $(x,y,z) \in U$. Παίρνουμε και ένα πολύ κοντινό σημείο $(x+h, y, z)$ στο U. Τότε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x+h,y,z) - \phi(x,y,z)}{h}.$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές $\phi(x,y,z)$ και $\phi(x+h,y,z)$ θεωρούμε μια καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ μέσα στο U η οποία ενώνει το (x_0,y_0,z_0) με το (x,y,z) και άρα έχουμε

$$\phi(x,y,z) = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS.$$

Τώρα θεωρούμε και την ευθύγραμμη καμπύλη $\boldsymbol{\rho}$ που ενώνει το (x,y,z) με το $(x+h,y,z)$. Τότε η συγκόλληση της $\boldsymbol{\sigma}$ και της $\boldsymbol{\rho}$ είναι καμπύλη μέσα στο U η οποία ενώνει το (x_0,y_0,z_0) με το $(x+h,y,z)$ και άρα

$$\phi(x+h,y,z) = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS + \int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS.$$

Επομένως, θεωρώντας την παραμετρικοποίηση $\boldsymbol{\rho}(t) = (x+t,y,z)$, $t\in[0,h]$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\phi(x+h,y,z) - \phi(x,y,z) &= \int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS = \int_0^h \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t))\cdot\boldsymbol{\rho}'(t)\,dt = \int_0^h \mathbf{f}(x+t,y,z)\cdot(1,0,0)\,dt \\
&= \int_0^h \Big(P(x+t,y,z), Q(x+t,y,z), R(x+t,y,z)\Big)\cdot(1,0,0)\,dt \\
&= \int_0^h P(x+t,y,z)\,dt.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h,y,z)-\phi(x,y,z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h P(x+t,y,z)\,dt = P(x,y,z).$$

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει $\frac{\partial\phi}{\partial y} = Q$ και $\frac{\partial\phi}{\partial z} = R$ εργαζόμαστε όπως πριν κάνοντας τις προφανείς αλλαγές, όπως κάναμε και στην Πρόταση 1 για να αποδείξουμε την $\frac{\partial\phi}{\partial y} = Q$. □

Όταν έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f} = (P,Q,R)$ και ένα βαθμωτό πεδίο ϕ στο ανοικτό χωρίο U και ισχύει

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = R$$

ή, ισοδύναμα,

$$\nabla\phi = \mathbf{f}$$

στο U, τότε λέμε ότι το ϕ είναι **πεδίο δυναμικού** για το $\mathbf{f}$.

Αξίζει να γράψουμε ως αυτόνομο συμπέρασμα αυτό που προέκυψε μέσα στην απόδειξη της Πρότασης 4.

Αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}$ *έχει πεδίο δυναμικού* ϕ *στο ανοικτό χωρίο* U*, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του* $\mathbf{f}$ *σε κάθε καμπύλη* $\boldsymbol{\sigma}$ *μέσα στο* U *ισούται με την διαφορά των τιμών του* ϕ *στα άκρα της καμπύλης:*

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,dS = \phi(\boldsymbol{\sigma}(b)) - \phi(\boldsymbol{\sigma}(a)).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. *Έστω ανοικτό και συνεκτικό χωρίο* U *και διανυσματικό πεδίο* $\mathbf{f} = (P,Q,R)$ *στο* U*. Αν το* $\mathbf{f}$ *είναι συντηρητικό στο* U*, τότε ισχύει*

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{118}$$

στο U.

Απόδειξη. Ίδια με την απόδειξη της Πρότασης 2. □

Σχόλιο. Στην Πρόταση 4 έχουμε δύο ισοδύναμες συνθήκες για να είναι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ συντηρητικό. Στην Πρόταση 5 *έχουμε αναγκαία συνθήκη αλλά όχι ικανή*. Η Πρόταση 5 λέει ότι, αν το **f** είναι συντηρητικό, τότε ισχύει η (118). Αλλά, αν ισχύει η (118) **δεν** συνεπάγεται ότι το **f** είναι συντηρητικό.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι τρεις σχέσεις της (118) συνδυάζονται σε μία διανυσματική σχέση:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}. \tag{119}$$

Το ίδιο μπορούμε να πούμε και για την σχέση (115) στις δύο διαστάσεις. Βέβαια, όταν είμαστε στις δύο διαστάσεις δεν ορίζεται στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Αλλά μπορούμε να επεκτείνουμε το $\mathbf{f} = (P, Q)$ στις τρεις διαστάσεις, ορίζοντας

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0).$$

Δηλαδή επισυνάπτουμε τρίτη συντεταγμένη συνάρτηση την σταθερή $R(x, y, z) = 0$ και, ταυτόχρονα, θεωρούμε τις δύο πρώτες συντεταγμένες συναρτήσεις να είναι ανεξάρτητες του z. Τώρα, αν κάνουμε τον υπολογισμό του $\nabla \times \mathbf{f}$ θα δούμε ότι είναι ίσο με $(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$ και άρα η σχέση (115) για το αρχικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f} = (P, Q)$ ισοδυναμεί με την σχέση $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ για το αντίστοιχο $\mathbf{f} = (P, Q, 0)$.

Μετά από αυτά, μπορούμε να διατυπώσουμε τις Προτάσεις 2 και 5 ως εξής:

Αν ένα διανυσματικό πεδίο **f** *είναι συντηρητικό στο ανοικτό, συνεκτικό χωρίο U, τότε ισχύει $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ στο U ή, ισοδύναμα, ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου μηδενίζεται στο U.*

Όταν ένα διανυσματικό πεδίο έχει μηδενικό στροβιλισμό σε ένα ανοικτό χωρίο, τότε το διανυσματικό πεδίο ονομάζεται **αστρόβιλο** στο χωρίο.

Τώρα, έστω U ένα ανοικτό και συνεκτικό χωρίο στον xyz-χώρο. Το U λέγεται **απλά συνεκτικό** αν έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε απλή κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ η οποία περιέχεται στο U υπάρχει κάποια επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$ η οποία περιέχεται κι αυτή στο U και έχει ως (μοναδική) συνοριακή καμπύλη την $\boldsymbol{\sigma}$.

Για παράδειγμα, μια ανοικτή μπάλα, ένα ανοικτό παραλληλεπίπεδο, ένας ανοικτός ημιχώρος, ολόκληρος ο xyz-χώρος, το σύνολο που προκύπτει αν από τον xyz-χώρο αφαιρέσουμε μια ημιευθεία είναι όλα απλά συνεκτικά σύνολα. Επίσης, ένας ανοικτός σφαιρικός δακτύλιος, δηλαδή μία ανοικτή μπάλα κέντρου (x_0, y_0, z_0) και ακτίνας r_2 από την οποία έχουμε αφαιρέσει μία μικρότερη ομόκεντρη κλειστή μπάλα ακτίνας r_1 με $r_1 < r_2$, είναι απλά συνεκτικό χωρίο. Αντιθέτως, αν από μία ανοικτή μπάλα αφαιρέσουμε μία διάμετρό της, τότε το χωρίο που προκύπτει είναι ανοικτό και συνεκτικό αλλά δεν είναι απλά συνεκτικό. Πράγματι, αν θεωρήσουμε έναν μικρό κύκλο σε επίπεδο κάθετο στην συγκεκριμένη διάμετρο που αφαιρέσαμε και ο οποίος περιστρέφεται γύρω από αυτήν, τότε δεν μπορούμε να βρούμε επιφάνεια μέσα στην μπάλα η οποία να έχει ως (μοναδική) συνοριακή καμπύλη τον κύκλο που θεωρήσαμε και να μην τέμνει την συγκεκριμένη διάμετρο. Ομοίως, αν από τον xyz-χώρο αφαιρέσουμε μία ολόκληρη ευθεία, τότε το χωρίο που προκύπτει είναι ανοικτό και συνεκτικό αλλά δεν είναι απλά συνεκτικό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6. *Έστω ανοικτό και συνεκτικό χωρίο U το οποίο είναι απλά συνεκτικό και διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ στο U. Αν ισχύει*

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

στο U, τότε το **f** *είναι συντηρητικό στο U.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ισχύει $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ στο U.
Παίρνουμε τυχαία απλή κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ στο U. Επειδή το U είναι απλά συνεκτικό, υπάρχει κάποια επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$ η οποία περιέχεται κι αυτή στο U και έχει ως (μοναδική) συνοριακή καμπύλη την $\boldsymbol{\sigma}$. Από τον τύπο του Stokes έχουμε

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS = \pm \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}\, dA = \pm \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{0} \cdot \mathbf{N}\, dA = \pm \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} 0\, dA = 0.$$

Αποδείξαμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\mathbf{f}$ σε κάθε *απλή* κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ στο U είναι ίσο με 0 και τελειώνουμε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3. □

Παράδειγμα. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z\cos(yz) + x, y\cos(yz))$$

και θα δούμε αν είναι συντηρητικό και, αν είναι, θα βρούμε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$.
Κατ' αρχάς ελέγχουμε αν ισχύει η αναγκαία συνθήκη (119) για να είναι το διανυσματικό πεδίο μας συντηρητικό:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \Big(\frac{\partial(y\cos(yz))}{\partial y} - \frac{\partial(z\cos(yz) + x)}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial(y\cos(yz))}{\partial x}, \frac{\partial(z\cos(yz) + x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\Big) = (0, 0, 0).$$

Άρα ισχύει η (119). *Αν δεν ίσχυε η (119) θα συμπεραίναμε ότι το* $\mathbf{f}$ *δεν είναι συντηρητικό.* Τώρα που ισχύει η (119) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αυτομάτως ότι το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό, διότι η (119) δεν είναι ικανή συνθήκη. Για να είναι ικανή συνθήκη η (119) πρέπει, βάσει της Πρότασης 6, να ελέγξουμε αν το χωρίο U στο οποίο είναι ορισμένο το $\mathbf{f}$ είναι απλά συνεκτικό. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το U είναι ολόκληρος ο xyz-χώρος και άρα είναι απλά συνεκτικό. Επομένως, αφού ισχύει η (119), το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό και πρέπει τώρα να βρούμε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$, η ύπαρξη του οποίου είναι εγγυημένη από την Πρόταση 4. Πρέπει, δηλαδή, να βρούμε μία αριθμητική συνάρτηση ϕ στον xyz-χώρο ώστε να ισχύει

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) = y \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) = z\cos(yz) + x \\ \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z) = y\cos(yz) \end{cases} \tag{120}$$

για κάθε (x, y, z). Από την πρώτη σχέση του συστήματος (120) παίρνουμε

$$\phi(x, y) = xy + c(y, z), \tag{121}$$

όπου $c(y, z)$ είναι μια σταθερά σε σχέση με το x αλλά που μπορεί να εξαρτάται από τα y, z: δηλαδή, το $c(y, z)$ είναι συνάρτηση των y, z. Τώρα χρησιμοποιούμε την (121) στην δεύτερη σχέση του συστήματος (120) και παίρνουμε

$$x + \frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = z\cos(yz) + x$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = z\cos(yz)$$

για κάθε y, z. Συνεπάγεται

$$c(y, z) = \sin(yz) + c(z), \tag{122}$$

όπου $c(z)$ είναι μια σταθερά σε σχέση με το y αλλά που μπορεί να εξαρτάται από το z: δηλαδή, το $c(z)$ είναι συνάρτηση του z. Με την (122) η (121) γίνεται

$$\phi(x, y) = xy + \sin(yz) + c(z). \tag{123}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την (123) στην τρίτη σχέση του συστήματος (120) και παίρνουμε

$$y\cos(yz) + c'(z) = y\cos(yz)$$

ή, ισοδύναμα,

$$c'(z) = 0$$

για κάθε z. Επομένως, η συνάρτηση $c(z)$ είναι μία αυθαίρετη σταθερά: $c(z) = c$ για κάθε z. Άρα, σε συνδυασμό με την (123), βλέπουμε ότι έχουμε άπειρες λύσεις:

$$\phi(x, y) = xy + \sin(yz) + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Δεύτερο παράδειγμα. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \Big(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \Big)$$

και θα δούμε αν είναι συντηρητικό και, αν είναι, θα βρούμε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$. Πάλι ξεκινάμε ελέγχοντας αν ισχύει η αναγκαία συνθήκη (119) για να είναι το διανυσματικό πεδίο συντηρητικό:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \Big(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}\Big), \frac{\partial y}{\partial z}\Big(-\frac{y}{x^2 + y^2}\Big) - \frac{\partial 0}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2 + y^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{y}{x^2 + y^2}\Big)\Big) = (0, 0, 0).$$

Άρα ισχύει η (119). Αν δεν ίσχυε η (119) θα συμπεραίναμε ότι το $\mathbf{f}$ δεν είναι συντηρητικό. Για να αποφασίσουμε αν το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό πρέπει να ελέγξουμε αν το χωρίο U στο οποίο είναι ορισμένο το $\mathbf{f}$ είναι απλά συνεκτικό. Στην περίπτωσή μας το U είναι ο xyz-χώρος εκτός του z-άξονα και άρα *δεν είναι απλά συνεκτικό*. Άρα και πάλι δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν το $\mathbf{f}$ είναι συντηρητικό. Επειδή από τον xyz-χώρο λείπει ο z-άξονας, υποψιαζόμαστε ότι μπορεί να υπάρχει κάποια απλή κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ η οποία περιστρέφεται γύρω από τον z-άξονα και για την οποία ισχύει $\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \neq 0$. Από αυτό θα συμπεράνουμε ότι το $\mathbf{f}$ δεν είναι συντηρητικό. Δοκιμάζουμε την απλούστερη τέτοια καμπύλη: τον κύκλο στο xy-επίπεδο με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτίνα 1, ο οποίος έχει παραμετρικοποίηση

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, 0), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, 0 \Big) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

Άρα, αφού βρήκαμε έστω και μία κλειστή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ στο χωρίο U με $\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \neq 0$, το $\mathbf{f}$ δεν είναι συντηρητικό.

Τώρα δεν έχει νόημα να ψάξουμε να βρούμε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$, αφού η Πρόταση 4 λέει ότι η ύπαρξη πεδίου δυναμικού ϕ για το $\mathbf{f}$ είναι *ισοδύναμη* με το να είναι το $\mathbf{f}$ συντηρητικό. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο πεδίο δυναμικού ϕ.

Η παρουσίαση του μαθήματος έχει τελειώσει, αλλά στις επόμενες λίγες σελίδες θα κάνω μία πολύ συνοπτική επισκόπηση ορισμένων κρίσιμων σημείων, κυρίως σε σχέση με ζητήματα προσανατολισμού καμπυλών και επιφανειών.

Προσανατολισμός καμπύλης.

Αν $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, είναι η παραμετρικοποίηση μιας καμπύλης με τις συντεταγμένες συναρτήσεις της, τότε τα

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \qquad \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|}$$

είναι *εφαπτόμενο διάνυσμα* και *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα*, αντιστοίχως, στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t)$ της τροχιάς της. Το μήκος του $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ είναι, φυσικά, ίσο με

$$\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Οι κατευθύνσεις των δύο διανυσμάτων, $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ και $\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t))$, είναι ίδιες και ταυτίζονται με την φορά διαγραφής της καμπύλης όπως αυτή (η φορά διαγραφής) καθορίζεται από την συγκεκριμένη παραμετρικοποίηση $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Αν αλλάξει η παραμετρικοποίηση (δηλαδή ο τύπος $\boldsymbol{\sigma}(t)$) της καμπύλης και η καμπύλη αποκτήσει αντίθετη φορά διαγραφής, τότε τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ μετατρέπονται στα αντίθετα των προηγουμένων. Επομένως, *ο προσανατολισμός της καμπύλης καθορίζεται από την κατεύθυνση των αντίστοιχων μοναδιαίων εφαπτόμενων διανυσμάτων που προκύπτουν από την συγκεκριμένη παραμετρικοποίησή της*. Συνοπτικά: *ίδια μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα σημαίνει ίδιος προσανατολισμός ενώ αντίθετα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα σημαίνει αντίθετος προσανατολισμός*.

Στα προηγούμενα αναφέρθηκα σε καμπύλες στον xyz-χώρο. Αν έχουμε καμπύλες στο xy-επίπεδο, τότε τα προηγούμενα ισχύουν αφού πρώτα σβήσουμε τα $z(t)$, $z'(t)$.

Προσανατολισμός επιφάνειας.

Αν $\boldsymbol{\Sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$, είναι η παραμετρικοποίηση μιας επιφάνειας με τις συντεταγμένες συναρτήσεις της, τότε τα

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u, v) = \Big(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\Big), \qquad \mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma}(u, v)) = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u, v)}{\|\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u, v)\|}$$

είναι *κάθετο διάνυσμα* και *μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα*, αντιστοίχως, στο σημείο $\boldsymbol{\Sigma}(u, v)$ της τροχιάς της. Το μήκος του $\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u, v)$ είναι ίσο με

$$\Big\|\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u, v)\Big\| = \sqrt{\Big(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\Big)^2}.$$

Οι κατευθύνσεις των δύο διανυσμάτων, $\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u, v)$ και $\mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma}(u, v))$, είναι ίδιες. Αν αλλάξει η παραμετρικοποίηση (δηλαδή ο τύπος $\boldsymbol{\Sigma}(u, v)$) της επιφάνειας, τότε τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{N}(\boldsymbol{\Sigma}(u, v))$ ενδέχεται να μετατραπούν στα αντίθετα των προηγουμένων. Λέμε ότι *ο προσανατολισμός της επιφάνειας καθορίζεται από την κατεύθυνση των αντίστοιχων μοναδιαίων κάθετων διανυσμάτων που προκύπτουν από την συγκεκριμένη παραμετρικοποίησή της*. Συνοπτικά: *ίδια μοναδιαία κάθετα διανύσματα σημαίνει ίδιος προσανατολισμός ενώ αντίθετα μοναδιαία κάθετα διανύσματα σημαίνει αντίθετος προσανατολισμός*.

Μορφές επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αριθμητικής συνάρτησης.

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, dS.}$$

Αυτό είναι το μοναδικό σύμβολο και σημαίνει:

$$\int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\, \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt,$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, είναι η παραμετρικοποίηση της καμπύλης με τις συντεταγμένες συναρτήσεις της. Γράφω τον τύπο στην περίπτωση που η καμπύλη είναι στον xyz-χώρο. Αν η καμπύλη είναι στο xy-επίπεδο, τότε απλώς σβήνουμε το $z(t)$ και το $z'(t)$.
Η παραμετρικοποίηση είτε είναι δοσμένη είτε την βρίσκουμε εμείς βασισμένοι στην περιγραφή της τροχιάς της καμπύλης και στον προσανατολισμό της. Ο προσανατολισμός της καμπύλης (δηλαδή το ποιά κατεύθυνση έχουν τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα που προκύπτουν από την παραμετρικοποίησή της) δεν παίζει κανένα ρόλο: το αριθμητικό αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης.

Έχουμε τρία σύμβολα. Το πρώτο είναι:

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}$$

και σημαίνει:

$$\int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt.$$

Το δεύτερο είναι:

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\, dS}$$

και σημαίνει:

$$\int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}(t))\, \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|}\, \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt.$$

Τα δύο πρώτα σύμβολα καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα και άρα συμβολίζουν το ίδιο πράγμα.
Ας γράψουμε την διανυσματική συνάρτηση και την παραμετρικοποίηση της καμπύλης με τις συντεταγμένες συναρτήσεις τους: $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ ή $\mathbf{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ και $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$. Αν λάβουμε υπ' όψη τις συντεταγμένες συναρτήσεις, τότε τα δύο προηγούμενα ολοκληρώματα γράφονται:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt &= \int_a^b \mathbf{f}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt \\
&= \int_a^b \Big(P(x(t), y(t), z(t)), Q(x(t), y(t), z(t)), R(x(t), y(t), z(t))\Big) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))\, dt \\
&= \int_a^b \Big[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\Big]\, dt.
\end{aligned}$$

Αν είμαστε στο xy-επίπεδο αντί στον xyz-χώρο, απλώς σβήνουμε τα $z(t)$, $z'(t)$ καθώς και το $R(x(t), y(t), z(t))$.
Υπάρχει και τρίτο σύμβολο:

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{\sigma}} [P\, dx + Q\, dy + R\, dz]} \qquad \text{ή} \qquad \boxed{\int_{\boldsymbol{\sigma}} [P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz]}$$

και σημαίνει:

$$\int_a^b \Big[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\Big]\, dt.$$

Και το τρίτο σύμβολο καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα με τα άλλα δύο.
Τονίζω ότι, σε αντίθεση με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αριθμητικής συνάρτησης, στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης ο προσανατολισμός της καμπύλης (δηλαδή το ποιά

κατεύθυνση έχουν τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα που προκύπτουν από την παραμετρικοποίησή της) παίζει ρόλο: τα αριθμητικά αποτελέσματα με τους δύο αντίθετους προσανατολισμούς είναι αντίθετα.
Πρακτικός κανόνας: Όταν πρέπει να υπολογίσουμε ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης και περιγράφεται η τροχιά της καμπύλης αλλά *δεν* καθορίζεται ο προσανατολισμός της, τότε χρησιμοποιούμε μια οποιαδήποτε παραμετρικοποίηση της καμπύλης για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα και στο αριθμητικό αποτέλεσμα που θα βρούμε βάζουμε το διπλό πρόσημο $\pm$ για να δηλώσουμε ότι το πρόσημο εξαρτάται από τον (αδήλωτο) προσανατολισμό. Αν, όμως, καθορίζεται *και* ο προσανατολισμός της καμπύλης, τότε χρησιμοποιούμε μια οποιαδήποτε παραμετρικοποίηση (αυτήν που είναι πιο πρόσφορη) της καμπύλης για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα και στο αριθμητικό αποτέλεσμα που θα βρούμε βάζουμε το πρόσημο $+$ αν ο δοσμένος προσανατολισμός ταυτίζεται με τον προσανατολισμό που προκύπτει από την δική μας παραμετρικοποίηση ενώ βάζουμε το πρόσημο $-$ αν ο δοσμένος προσανατολισμός είναι αντίθετος με τον προσανατολισμό που προκύπτει από την δική μας παραμετρικοποίηση. Σ' αυτήν την δεύτερη περίπτωση είναι σημαντικό να φτιάξουμε ένα πρόχειρο σχήμα ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε προσανατολισμούς.

Μορφές επιφανειακών ολοκληρωμάτων.

Επιφανειακό ολοκλήρωμα αριθμητικής συνάρτησης.

$$\boxed{\iint_{\Sigma} f\, dA.}$$

Αυτό είναι το μοναδικό σύμβολο και σημαίνει:

$$\iint_D f(\boldsymbol{\Sigma}(u,v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v) \right\| du dv$$
$$= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{\Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big)^2}\, du dv,$$

όπου $\boldsymbol{\Sigma}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D$, είναι η παραμετρικοποίηση της επιφάνειας με τις συντεταγμένες συναρτήσεις της.
Η παραμετρικοποίηση είτε είναι δοσμένη είτε την βρίσκουμε εμείς βασισμένοι στην περιγραφή της τροχιάς της επιφάνειας και στον προσανατολισμό της. Ο προσανατολισμός της επιφάνειας (δηλαδή, το ποιά κατεύθυνση έχουν τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα που προκύπτουν από την παραμετρικοποίησή της) δεν παίζει κανένα ρόλο: το αριθμητικό αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης.

Έχουμε πάλι τρία σύμβολα. Το πρώτο είναι:

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}}$$

και σημαίνει:

$$\iint_D \mathbf{f}(\boldsymbol{\Sigma}(u,v)) \cdot \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big) du dv.$$

Το δεύτερο είναι:

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}\, dA}$$

και σημαίνει:

$$\iint_D \mathbf{f}(\mathbf{\Sigma}(u,v))\cdot\mathbf{N}(\mathbf{\Sigma}(u,v)) \left\|\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\right\| dudv$$
$$= \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{\Sigma}(u,v))\cdot \frac{\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)}{\|\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\|}\left\|\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\right\| dudv$$
$$= \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{\Sigma}(u,v))\cdot\Big(\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big)dudv.$$

Τα δύο πρώτα σύμβολα καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα και άρα συμβολίζουν το ίδιο πράγμα.
Ας γράψουμε πάλι την διανυσματική συνάρτηση και την παραμετρικοποίηση της επιφάνειας με τις συντεταγμένες συναρτήσεις τους: $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ ή $\mathbf{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ και $\mathbf{\Sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$. Αν λάβουμε υπ' όψη τις συντεταγμένες συναρτήσεις, τότε τα δύο προηγούμενα ολοκληρώματα γράφονται:

$$\iint_D \mathbf{f}(\mathbf{\Sigma}(u,v))\cdot\Big(\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial v}(u,v)\Big)dudv$$
$$= \iint_D \mathbf{f}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big)dudv$$
$$= \iint_D \Big(P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\Big)\cdot$$
$$\cdot\Big(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big)dudv$$
$$= \iint_D \Big[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+$$
$$+ R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]dudv.$$

Υπάρχει και τρίτο σύμβολο:

$$\boxed{\iint_{\mathbf{\Sigma}}[P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy]}$$

ή, λίγο πιο αναλυτικά,

$$\boxed{\iint_{\mathbf{\Sigma}}[P(x,y,z)\,dy\wedge dz + Q(x,y,z)\,dz\wedge dx + R(x,y,z)\,dx\wedge dy]}$$

και σημαίνει:

$$\iint_D \Big[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+$$
$$+ R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]dudv.$$

Και το τρίτο σύμβολο καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα με τα άλλα δύο.
Σε αντίθεση με το επιφανειακό ολοκλήρωμα αριθμητικής συνάρτησης, στο επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης ο προσανατολισμός της επιφάνειας (δηλαδή, το ποιά κατεύθυνση έχουν τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα που προκύπτουν από την παραμετρικοποίησή της) παίζει ρόλο: τα αριθμητικά αποτελέσματα με τους δύο αντίθετους προσανατολισμούς είναι αντίθετα.
Πρακτικός κανόνας: Όταν έχουμε να υπολογίσουμε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης και περιγράφεται η τροχιά της επιφάνειας αλλά *δεν* καθορίζεται ο προσανατολισμός

της, χρησιμοποιούμε μια οποιαδήποτε παραμετρικοποίηση της επιφάνειας για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα και στο αριθμητικό αποτέλεσμα βάζουμε το διπλό πρόσημο ± για να δηλώσουμε ότι το πρόσημο εξαρτάται από τον (αδήλωτο) προσανατολισμό. Αν καθορίζεται *και* ο προσανατολισμός της επιφάνειας, χρησιμοποιούμε μια οποιαδήποτε παραμετρικοποίηση (αυτήν που είναι πιο πρόσφορη) της επιφάνειας για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα και στο αριθμητικό αποτέλεσμα που θα βρούμε βάζουμε το πρόσημο $+$ αν ο δοσμένος προσανατολισμός ταυτίζεται με τον προσανατολισμό που προκύπτει από την δική μας παραμετρικοποίηση ενώ βάζουμε το πρόσημο $-$ αν ο δοσμένος προσανατολισμός είναι αντίθετος με τον προσανατολισμό που προκύπτει από την δική μας παραμετρικοποίηση. Σ' αυτήν την δεύτερη περίπτωση είναι σημαντικό να φτιάξουμε ένα πρόχειρο σχήμα ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε προσανατολισμούς (δηλαδή τις κατευθύνσεις των μοναδιαίων κάθετων διανυσμάτων).

Τα ολοκληρωτικά θεωρήματα.

Το θεώρημα του Green.

Ο τύπος του Green είναι:

$$\boxed{\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dA = \sum_{j=1}^{k} \oint_{\boldsymbol{\sigma}_j} [P\,dx + Q\,dy].}$$

Ο τύπος αυτός συσχετίζει ένα διπλό ολοκλήρωμα στο χωρίο D του xy-επιπέδου με το άθροισμα κάποιων επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στις κλειστές συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$ του D. Το διπλό ολοκλήρωμα είναι της συνάρτησης $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, όπου $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι συναρτήσεις ορισμένες στο χωρίο D. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα είναι της *διαφορικής μορφής* $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, όπου οι P, Q είναι οι ίδιες συναρτήσεις με τις προηγούμενες.
Το μόνο σχόλιο που έχω να κάνω εδώ είναι σχετικά με τους προσανατολισμούς των $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$, διότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα είναι επικαμπύλια ολοκληρώματα διανυσματικής συνάρτησης, της $\mathbf{f} = (P, Q)$. Για να ισχύει ο τύπος του Green πρέπει οι προσανατολισμοί των συνοριακών καμπυλών να είναι *θετικοί σε σχέση με το χωρίο D*. Αυτό σημαίνει το εξής: *αν φανταστούμε τον εαυτό μας να έχει την κατεύθυνση του διανύσματος* $\mathbf{k}$ *(του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στο xy-επίπεδο στην κατεύθυνση του θετικού z-άξονα) και να μετακινείται πάνω στις τροχιές των συνοριακών καμπυλών σύμφωνα με τον θετικό προσανατολισμό τους, τότε το (οριζόντιο) δεξί μας χέρι δείχνει προς την εξωτερική μεριά του χωρίου D.*
Πρακτικός κανόνας: Όταν πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Green και θέλουμε να παραμετρικοποιήσουμε τις συνοριακές καμπύλες του χωρίου D ώστε να υπολογίσουμε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πάνω σ' αυτές, τότε για καθεμιά συνοριακή καμπύλη χρησιμοποιούμε μια οποιαδήποτε παραμετρικοποίηση (αυτήν που είναι πιο πρόσφορη) και στο αριθμητικό αποτέλεσμα που θα βρούμε βάζουμε το πρόσημο $+$ ή το πρόσημο $-$ αν ο *θετικός προσανατολισμός* της συνοριακής καμπύλης σε σχέση με το χωρίο είναι ίδιος ή αντίθετος, αντιστοίχως, με τον προσανατολισμό που προκύπτει από την δική μας παραμετρικοποίηση.

Το θεώρημα του Stokes.

Ο τύπος του Stokes είναι:

$$\boxed{\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N}\,dA = \sum_{j=1}^{k} \oint_{\boldsymbol{\sigma}_j} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T}\,dS.}$$

Ο τύπος αυτός συσχετίζει ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα στην επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$ με το άθροισμα κάποιων επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στις κλειστές συνοριακές καμπύλες $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$ της $\boldsymbol{\Sigma}$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι της διανυσματικής συνάρτησης $\nabla \times \mathbf{f}$, δηλαδή του στροβιλισμού της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{f}$. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα είναι της ίδιας της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{f}$.

Πάλι εδώ το μόνο σχόλιο που έχω να κάνω είναι σχετικά με τους προσανατολισμούς της $\mathbf{\Sigma}$ καθώς και των $\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_k$, διότι όλα τα ολοκληρώματα (επιφανειακό και επικαμπύλια) είναι ολοκληρώματα διανυσματικών συναρτήσεων. Για να ισχύει ο τύπος του Stokes πρέπει οι προσανατολισμοί των $\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_k$, όπως αυτοί καθορίζονται από τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα $\mathbf{T}$, να είναι *θετικοί* σε σχέση με τον προσανατολισμό της $\mathbf{\Sigma}$, όπως αυτός καθορίζεται από τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$. Αυτό σημαίνει το εξής: *αν φανταστούμε τον εαυτό μας να έχει την κατεύθυνση του διανύσματος* $\mathbf{N}$ *και να μετακινείται πάνω στις τροχιές των συνοριακών καμπυλών στην κατεύθυνση των διανυσμάτων* $\mathbf{T}$*, τότε το δεξί μας χέρι δείχνει προς την εξωτερική μεριά της επιφάνειας.*
Πρακτικός κανόνας: Όταν πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Stokes και θέλουμε να παραμετρικοποιήσουμε την επιφάνεια καθώς και τις συνοριακές καμπύλες της ώστε να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα καθώς και τα επικαμπύλια ολοκληρώματα, τότε χρησιμοποιούμε μια οποιαδήποτε παραμετρικοποίηση (αυτήν που είναι πιο πρόσφορη) για την επιφάνεια καθώς και για καθεμιά συνοριακή καμπύλη. Τώρα, έστω ότι η παραμετρικοποίηση της επιφάνειας που χρησιμοποιήσαμε καθορίζει έναν συγκεκριμένο προσανατολισμό γι αυτήν (βάσει των συγκεκριμένων κάθετων διανυσμάτων $\mathbf{N}$ που προκύπτουν από την παραμετρικοποίηση που επιλέξαμε). Τότε στο αριθμητικό αποτέλεσμα καθενός επικαμπυλίου ολοκληρώματος που θα βρούμε βάζουμε το πρόσημο $+$ ή το πρόσημο $-$ αν ο *θετικός προσανατολισμός* της αντιστοιχης συνοριακής καμπύλης σε σχέση με τον προσανατολισμό της επιφάνειας είναι ίδιος ή αντίθετος, αντιστοίχως, με τον προσανατολισμό που προκύπτει από την δική μας παραμετρικοποίηση της καμπύλης.

Το θεώρημα του Gauss.

Ο τύπος του Gauss είναι:

$$\boxed{\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV = \sum_{j=1}^{k} \oiint_{\mathbf{\Sigma}_j} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}\, dA.}$$

Ο τύπος αυτός συσχετίζει ένα τριπλό ολοκλήρωμα στο χωρίο Ω με το άθροισμα κάποιων επιφανειακών ολοκληρωμάτων στις κλειστές συνοριακές επιφάνειες $\mathbf{\Sigma}_1, \dots, \mathbf{\Sigma}_k$ του Ω. Το τριπλό ολοκλήρωμα είναι της αριθμητικής συνάρτησης $\nabla \cdot \mathbf{f}$, δηλαδή της απόκλισης της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{f}$. Τα επιφανειακά ολοκληρώματα είναι της ίδιας της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{f}$.
Και πάλι το μόνο σχόλιο που έχω να κάνω είναι σχετικά με τους προσανατολισμούς των $\mathbf{\Sigma}_1, \dots, \mathbf{\Sigma}_k$, διότι τα επιφανειακά ολοκληρώματα είναι επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικής συνάρτησης. Για να ισχύει ο τύπος του Gauss πρέπει οι προσανατολισμοί των συνοριακών επιφανειών, όπως αυτοί καθορίζονται από τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$, να είναι *θετικοί σε σχέση με το χωρίο* Ω. Αυτό σημαίνει το εξής: *τα διανύσματα* $\mathbf{N}$ *πρέπει να κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά του* Ω.
Πρακτικός κανόνας: Όταν πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Gauss και θέλουμε να παραμετρικοποιήσουμε τις συνοριακές επιφάνειες του χωρίου Ω ώστε να υπολογίσουμε τα επιφανειακά ολοκληρώματα πάνω σ' αυτές, τότε για καθεμιά συνοριακή επιφάνεια χρησιμοποιούμε μια οποιαδήποτε παραμετρικοποίηση (αυτήν που είναι πιο πρόσφορη) και στο αριθμητικό αποτέλεσμα που θα βρούμε βάζουμε το πρόσημο $+$ ή το πρόσημο $-$ αν τα διανύσματα $\mathbf{N}$ που προκύπτουν από την δική μας παραμετρικοποίηση κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά ή προς την εσωτερική μεριά, αντιστοίχως, του Ω.