

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. Έστω $R = [a, b] \times [c, d]$. Αποδείξτε ότι $\iint_R g(x)h(y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy$. Βάσει αυτού υπολογίστε τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα
 - i. $\iint_R (xy)^2 \cos(x^3) dx dy$, όπου $R = [0, 1] \times [0, 1]$.
 - ii. $\iint_R x^m y^n dx dy$ ($m, n \geq 0$), όπου $R = [0, 1] \times [0, 1]$.
 - iii. $\iint_R \frac{x^3 y}{y^2 + 1} dx dy$, όπου $R = [0, 2] \times [-1, 1]$.
2. (*) Αναγνωρίστε τον μοναδιαίο δίσκο $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ως χωρίο πρώτου τύπου και δεύτερου τύπου και γράψτε με δύο τρόπους το $\iint_D f(x, y) dx dy$ βάσει των τύπων του Fubini.
3. (*) Αναγνωρίστε το χωρίο D που βρίσκεται ανάμεσα στην ευθεία με εξίσωση $y = x$ και στην παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ ως χωρίο πρώτου τύπου και δεύτερου τύπου και γράψτε με δύο τρόπους το $\iint_D f(x, y) dx dy$ βάσει των τύπων του Fubini.
4. Έστω D το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στον x -άξονα, στον y -άξονα και στην ευθεία με εξίσωση $2x + 5y = 10$. Υπολογίστε το $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.
5. Έστω D το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στον y -άξονα και στην παραβολή με εξίσωση $x = 4 - y^2$. Υπολογίστε το $\iint_D x^3 y dx dy$.
6. Έστω D το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στους κύκλους με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνες 1 και 2 και στο ημιεπίπεδο πάνω από τον x -άξονα. Υπολογίστε το $\iint_D (xy + 1) dx dy$.
7. Έστω D το τριγωνικό χωρίο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(2, 0)$ και $(0, 2)$. Υπολογίστε το $\iint_D xy dx dy$.
8. Έστω D το τριγωνικό χωρίο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 3)$ και $(2, 2)$. Υπολογίστε το $\iint_D e^{x-y} dx dy$.
9. Γράψτε καθένα από τα παρακάτω διαδοχικά ολοκληρώματα ως ολοκλήρωμα σε συγκεκριμένο χωρίο D , το οποίο είναι πρώτου και δεύτερου τύπου, και κατόπιν αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης βάσει των τύπων του Fubini.
 - i. $\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x, y) dy \right) dx$.
 - ii. $\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy \right) dx$.
 - iii. $\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} f(x, y) dy \right) dx$.
 - iv. $\int_{-2}^2 \left(\int_0^{4-y^2} f(x, y) dx \right) dy$.
 - v. $\int_0^3 \left(\int_{-x}^x f(x, y) dy \right) dx$.
 - vi. $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$.
 - vii. $\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos x} f(x, y) dy \right) dx$.
 - viii (*) $\int_1^2 \left(\int_{2x}^{3x+1} f(x, y) dy \right) dx$.
 - ix. $\int_1^2 \left(\int_{\log x}^{e^x} f(x, y) dy \right) dx$.
 - x. $\int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{9-y^2}}^0 f(x, y) dx \right) dy$.

- xi. $\int_0^3 \left(\int_0^{\text{Arccos}(y/3)} f(x, y) dx \right) dy.$
10. Γράψτε καθένα από τα παρακάτω διαδοχικά ολοκληρώματα ως ολοκλήρωμα σε συγκεκριμένο χωρίο D , το οποίο είναι δευτέρου τύπου αλλά όχι πρώτου τύπου. Χωρίστε το D σε δύο υποχωρία πρώτου τύπου και κατόπιν αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης βάσει των τύπων του Fubini.
- i. $\int_{-1}^1 \left(\int_{-2|y|}^{|y|} f(x, y) dx \right) dy.$
- ii. (*) $\int_{-3}^2 \left(\int_0^{y^2} f(x, y) dx \right) dy.$
11. Δείτε αν υπολογίζονται σχετικά εύκολα τα παρακάτω διαδοχικά ολοκληρώματα. Κατόπιν γράψτε τα ως διπλά ολοκληρώματα σε συγκεκριμένα χωρία D , τα οποία είναι πρώτου και δευτέρου τύπου, αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης βάσει των τύπων του Fubini και υπολογίστε τα πιο εύκολα.
- i. $\int_0^1 \left(\int_0^1 y e^{xy} dy \right) dx.$
- ii. $\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2} dy \right) dx. (a > 0).$
- iii. $\int_1^2 \left(\int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{e^{2y}+1} dy \right) dx.$
- iv. $\int_0^1 \left(\int_y^1 \sin(x^2) dx \right) dy.$
- v. (*) $\int_0^4 \left(\int_{y/2}^2 e^{x^2} dx \right) dy$
- vi. $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx \right) dy.$
12. Σχεδιάστε το στερεό του οποίου ο όγκος ισούται με το $\int_0^1 \left(\int_0^1 (5-x-y) dy \right) dx.$
13. Σχεδιάστε το στερεό του οποίου ο όγκος ισούται με το $\int_0^3 \left(\int_0^2 (9+x^2+y^2) dx \right) dy.$
14. Υπολογίστε τον όγκο του κατακόρυφου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο ορθογώνιο $[1, 2] \times [0, 1]$ του xy -επιπέδου και του γραφήματος της συνάρτησης $f(x, y) = 1 + 2x + 3y.$
15. Υπολογίστε τον όγκο του κατακόρυφου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο ορθογώνιο $[-1, 1] \times [-3, -2]$ του xy -επιπέδου και του γραφήματος της συνάρτησης $f(x, y) = x^4 + y^2.$
16. Υπολογίστε τον όγκο του κατακόρυφου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο ορθογώνιο $[0, 1] \times [0, 1]$ του xy -επιπέδου και του γραφήματος της συνάρτησης $f(x, y) = xy.$
17. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο xz -επίπεδο, στο yz -επίπεδο, στο xy -επίπεδο, στα επίπεδα με εξισώσεις $x = 1$ και $y = 1$ και στην επιφάνεια με εξίσωση $z = x^2 + y^4.$
18. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο xy -επίπεδο, στα επίπεδα με εξισώσεις $x = 0, x = 1, y = 0$ και $y = \pi/2$ και στην επιφάνεια με εξίσωση $z = \sin y.$
19. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο επίπεδο με εξίσωση $z = 16$ και στην επιφάνεια με εξίσωση $z = x^2 + y^2.$
20. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx = \frac{\pi}{4}$ και $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}.$ Δεν θα έπρεπε να είναι ίσα τα δύο ολοκληρώματα;