

## Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

### Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (\*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. (\*) Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση  $(x, y) = T(u, v)$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D e^x y \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία  $(-1, 0)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(2, 0)$  και  $(1, 2)$ . Φροντίστε ώστε η γραμμική απεικόνιση να αντιστοιχίζει το  $D$  σε ορθογώνιο  $E$  στο  $uv$ -επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.
2. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση  $(x, y) = T(u, v)$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D xy \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι το παραλληλόγραμμο που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις  $y = x$ ,  $y = x + 3$ ,  $y = 3x$  και  $y = 3x - 4$ . Φροντίστε ώστε η γραμμική απεικόνιση να αντιστοιχίζει το  $D$  σε ορθογώνιο  $E$  στο  $uv$ -επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.
3. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση  $(x, y) = T(u, v)$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D (x+y) \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι το ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(3, 4)$  και  $(4, 3)$ . Φροντίστε ώστε η γραμμική απεικόνιση να αντιστοιχίζει το  $D$  σε ορθογώνιο  $E$  στο  $uv$ -επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.
4. (\*) Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση  $(x, y) = T(u, v)$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D (x + y^2) \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $(-3, 2)$ ,  $(2, -1)$  και  $(1, -2)$ . Φροντίστε ώστε η γραμμική απεικόνιση να αντιστοιχίζει το  $D$  σε τρίγωνο  $E$  στο  $uv$ -επίπεδο με δύο από τις πλευρές του παράλληλες στους κύριους άξονες.
5. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση  $(x, y) = T(u, v)$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D xy \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$  και  $(-1, 3)$ . Φροντίστε ώστε η γραμμική απεικόνιση να αντιστοιχίζει το  $D$  σε τρίγωνο  $E$  στο  $uv$ -επίπεδο με δύο από τις πλευρές του παράλληλες στους κύριους άξονες.
6. (\*) Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το  $\iint_D x \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι ο δίσκος κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνας 2.
7. (\*) Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το  $\iint_D xy \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι το χωρίο στο δεξιό  $xy$ -ημιεπίπεδο που βρίσκεται ανάμεσα στους κύκλους κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνων 1 και 2 και στις ευθείες με εξισώσεις  $y = x$  και  $y = -x$ .
8. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το  $\iint_D x^2 \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι το χωρίο που καθορίζεται από τις ανισώσεις  $0 \leq x \leq y$  και  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
9. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το  $\iint_D e^{x^2+y^2} \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι ο δίσκος κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνας  $a > 0$ .
10. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το  $\iint_D e^{-x^2-y^2} \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι το χωρίο που καθορίζεται από τις ανισώσεις  $y \leq 0$  και  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ .
11. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το  $\iint_D (x^4 + y^4 + 2x^2 y^2) \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι το μέρος του δίσκου κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνας 1 που βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο του  $xy$ -επιπέδου.
12. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το  $\iint_D x \, dx dy$ , όπου  $D$  είναι ο δίσκος κέντρου  $(2, 3)$  και ακτίνας 2.

13. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση  $(x, y) = T(u, v)$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D \frac{1}{x+y} dx dy$ , όπου  $D$  είναι το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$  και  $x + y = 4$ . (Υπόδειξη: Αν ξεκινήσετε ορίζοντας  $u = x$ ,  $v = x + y$ , θα δείτε ότι το  $D$  αντιστοιχίζεται σε τετράπλευρο  $E$  στο  $uv$ -επίπεδο με τρεις από τις πλευρές του παράλληλες στους κύριους άξονες, αλλά και ότι ταυτόχρονα απλοποιείται η συνάρτηση  $\frac{1}{x+y}$ .)
14. Θεωρώντας κατάλληλη απεικόνιση  $(x, y) = T(u, v)$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , όπου  $D$  είναι το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του  $xy$ -επιπέδου και ανάμεσα στις καμπύλες με εξισώσεις  $xy = 1$ ,  $xy = 3$ ,  $x^2 - y^2 = 1$  και  $x^2 - y^2 = 4$ . Φροντίστε ώστε η απεικόνιση να αντιστοιχίζει το  $D$  σε ορθογώνιο  $E$  στο  $uv$ -επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες. (Υπόδειξη: Η απεικόνιση δεν θα είναι γραμμική. Ξεκινήστε ορίζοντας τα  $u, v$  συναρτήσει των  $x, y$  με τρόπο που υπαγορεύεται από την μορφή των εξισώσεων των καμπυλών και μετά λύστε ως προς  $x, y$  συναρτήσει των  $u, v$ .)
15. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το  $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$ , όπου  $D$  είναι το χωρίο που καθορίζεται από τις ανισώσεις  $x + y \geq 1$  και  $x^2 + y^2 \leq 1$ . (Υπόδειξη: Ο υπολογισμός είναι πιο εύκολος αν καθορίσετε πρώτα το διάστημα στο οποίο κυμαίνεται η πολική γωνία  $\theta$  του σημείου  $(x, y) \in D$ .)
16. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση  $(x, y) = T(u, v)$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D \cos\left(\pi \frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$ , όπου  $D$  είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(1/2, 1/2)$ . (Υπόδειξη: Αν ξεκινήσετε ορίζοντας  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , θα δείτε ότι το  $D$  αντιστοιχίζεται σε τρίγωνο  $E$  στο  $uv$ -επίπεδο με δύο από τις πλευρές του παράλληλες στους κύριους άξονες, αλλά και ότι ταυτόχρονα απλοποιείται η συνάρτηση  $\cos\left(\pi \frac{x-y}{x+y}\right)$ .)
17. Ορίζοντας  $u = x^2 + y^2$ ,  $v = x^2 + y^2 - 2y$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D x e^y dx dy$ , όπου  $D$  είναι το χωρίο που καθορίζεται από τις ανισώσεις  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$  και  $x^2 + y^2 \geq 2y$ . Σχεδιάστε το  $D$  και το αντίστοιχο χωρίο  $E$  στο  $uv$ -επίπεδο.
18. Έστω  $D$  το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο του  $xy$ -επιπέδου που καθορίζεται από την ανίσωση  $x^{3/2} + y^{3/2} \leq a^{3/2}$  με  $a > 0$ . Μετασχηματίστε το  $\iint_D f(x, y) dx dy$  σε ολοκλήρωμα στο τρίγωνο  $E$  του  $uv$ -επιπέδου που καθορίζεται από τις ανισώσεις  $0 \leq u \leq a$  και  $0 \leq v \leq a - u$ .
19. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση  $(x, y) = T(u, v)$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)} dx dy$ , όπου  $D$  είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$ . Φροντίστε ώστε με την αλλαγή μεταβλητής να απλοποιηθεί η παράσταση  $\frac{y-x}{y+x}$ . (Υπόδειξη: Δοκιμάστε τους τύπους  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ .)
20. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση  $(x, y) = T(u, v)$ , υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το  $\iint_D \cos \frac{\pi(2x-y)}{2(x-2y)} dx dy$ , όπου  $D$  είναι το τρίγωνο ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις  $y = x$ ,  $x + y = 0$  και  $x - 2y = 2$ . Φροντίστε ώστε με την αλλαγή μεταβλητής να απλοποιηθεί η παράσταση  $\frac{2x-y}{x-2y}$ . (Υπόδειξη: Δοκιμάστε τους τύπους  $u = 2x - y$ ,  $v = x - 2y$ .)