

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Στις παρακάτω ασκήσεις (εκτός των δύο πρώτων) χρησιμοποιήστε αλλαγή σε σφαιρικές ή σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D xy \, dx dy dz$, όπου D είναι το παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τα επίπεδα με εξισώσεις $x + 2y + z = 4$, $x + 2y + z = -5$, $2x - y + z = -2$, $2x - y + z = 7$, $x + y + 3z = 3$ και $x + y + 3z = -2$.
2. Υπολογίστε τον όγκο του παραλληλεπίπεδου που ορίζεται από τα επίπεδα με εξισώσεις $2x - y - z = 3$, $2x - y - z = -3$, $x + y - z = -7$, $x + y - z = 4$, $4x + 3y - z = 8$ και $4x + 3y - z = 2$.
3. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dx dy dz$, όπου D είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0, 0, 0)$.
4. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D xy \, dx dy dz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ και βρίσκεται ανάμεσα στις σφαίρες κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνων 2 και 3.
5. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $x \geq 0$, $y \geq 0$, $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ και $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$.
6. Υπολογίστε τον όγκο μιας μπάλας ακτίνας $R > 0$ χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες. Συγκρίνατε με τον υπολογισμό με χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων.
7. Υπολογίστε το $\iiint_D \frac{1}{\sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}} \, dx dy dz$, όπου D είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0, 0, 0)$.
8. Υπολογίστε το $\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dx dy dz$, όπου D είναι ο σφαιρικός δακτύλιος ανάμεσα στις σφαίρες κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνων a και b ($0 < a < b$).
9. Υπολογίστε το $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)xyz \, dx dy dz$, όπου $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$.
10. Υπολογίστε το $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)xyz \, dx dy dz$, όπου $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0\}$.
11. Υπολογίστε το $\int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{1+(x^2+y^2+z^2)^2} \, dz \right) dy \right) dx$, κάνοντας αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες.
12. Θεωρούμε το ελλειψοειδές $D = \{(x, y, z) \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$ ($a, b, c > 0$). Υπολογίστε τον όγκο του D κάνοντας πρώτα αλλαγή μεταβλητής μέσω της συνάρτησης $(x, y, z) = T(u, v, w) = (au, bv, cw)$ και, κατόπιν, αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες.
13. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D z \, dx dy dz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$ και $x^2 + y^2 \leq 1$.
14. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D x \, dx dy dz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $x \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ και $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.
15. (*) Υπολογίστε το $\iiint e^{x^2+y^2-z} \, dx dy dz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $y \geq 0$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ και $-1 \leq z \leq 3$.
16. Υπολογίστε το $\iiint_D ze^{x^2+y^2} \, dx dy dz$, όπου $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3\}$.

17. Υπολογίστε το $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, με $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2, -2 \leq z \leq 3\}$.
18. Υπολογίστε το $\iiint_D (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$, όπου $D = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$, χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες.

Απαντήσεις.

1. $2835/4$
2. $99/2$
3. $4\pi(e - 1)3$
4. $211/15$
5. $15\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
6. $(4\pi/3)R^3$
7. $8\pi(\sqrt{2} - 1)/3$
8. $4\pi \log \frac{b}{a}$
9. 0
10. $(1/64)R^8$
11. $(\pi/8) \log 82$
12. $(4\pi/3)abc$
13. $\pi/6$
14. $1/2$
15. $\pi(e^5 - e - e^2 - e^{-2})/2$
16. $5\pi(e^4 - 1)/2$
17. $100\pi/3$
18. $\pi/2$