Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. (*) Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iiint_D 1/(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^a\,dxdydz$, όπου $a > 0$ και D είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0,0,0)$.

2. Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iiint_D 1/(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^a\,dxdydz$, όπου $a > 0$ και $D = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \geq 1\}$.

3. (*) Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D 1/\sqrt{xy}\,dxdy$, όπου $D = [0,1]\times[0,1]$.

4. Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D 1/(x^a y^b)\,dxdy$, όπου $a > 0$, $b > 0$ και $D = [0,1]\times[0,1]$.

5. Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D 1/(x^a y^b)\,dxdy$, όπου $a > 0$, $b > 0$ και $D = [1,+\infty)\times[1,+\infty)$.

6. (*) Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D y/x\,dxdy$, όπου D είναι το φραγμένο χωρίο που ορίζεται από τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = y$ και $x = 2y$.

7. (*) Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D x^{-3/2}e^{y-x}\,dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις σχέσεις $0 \leq y \leq x < +\infty$.

8. Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D xye^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις σχέσεις $0 \leq x < +\infty$ και $0 \leq y \leq 1$.

9. Θεωρήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, όπου $D = \mathbb{R}^2$ είναι ολόκληρο το xy-επίπεδο. Γράψτε το I ως όριο του $\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ όταν $R \to +\infty$, όπου $D_R = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq R^2\}$, και υπολογίστε την τιμή του I. Κατόπιν, γράψτε το I ως όριο του $\iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ όταν $R \to +\infty$, όπου $Q_R = [-R,R]\times[-R,R]$, και αποδείξτε ότι $I = J^2$, όπου J είναι το γενικευμένο ολοκλήρωμα μίας μεταβλητής $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Υπολογίστε την τιμή του J.

10. Θεωρήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D e^{-xy}\,dxdy$, όπου $D = [0,+\infty)\times[1,2]$. Γράψτε το I ως όριο του $\iint_{D_R} e^{-xy}\,dxdy$ όταν $R \to +\infty$, όπου $D_R = [0,R]\times[1,2]$. Χρησιμοποιήστε και τους δύο τύπους του Fubini για το ολοκλήρωμα στο D_R και μέσω ενός από τους δύο υπολογίστε την τιμή του I. Μέσω του δεύτερου τύπου, αποδείξτε ότι $I = J$, όπου J είναι το γενικευμένο ολοκλήρωμα μίας μεταβλητής $\int_0^{+\infty}(e^{-x}-e^{-2x})/x\,dx$. Υπολογίστε την τιμή του J. Προσέξτε: για ποιόν λόγο είναι το J γεν. ολοκλήρωμα;

Απαντήσεις.

1. $I = +\infty$, αν $a \geq 3$, και $I = 4\pi/(3-a)$, αν $0 < a < 3$.
2. $I = +\infty$, αν $0 < a \leq 3$, και $I = 4\pi/(a-3)$, αν $a > 3$.
3. $I = 4$
4. $I = +\infty$, αν $a \geq 1$ ή $b \geq 1$, και $I = 1/((1-a)(1-b))$, αν $0 < a < 1$ και $0 < b < 1$.
5. $I = +\infty$, αν $a \leq 1$ ή $b \leq 1$, και $I = 1/((a-1)(b-1))$, αν $a > 1$ και $b > 1$.
6. $3/16$
7. Το I συγκλίνει
8. $I = (e-1)/(4e)$
9. $I = \pi$, $J = \sqrt{\pi}$
10. $I = \log 2$, $J = \log 2$. Το J είναι γεν. ολοκλήρωμα *μόνο* επειδή το $[0, +\infty)$ δεν είναι φραγμένο διάστημα.