

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (\*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. Βρείτε την καμπύλη  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  όταν  $\sigma(0) = (0, 2, 5)$  και  $\sigma'(t) = (4t^3, \sin t, 5e^t)$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .
2. Βρείτε καμπύλη  $\sigma$  με τροχιά το σύνολο  $\{(x, y) \mid y = x^2\}$  καθώς και καμπύλη  $\rho$  με τροχιά το σύνολο  $\{(x, y) \mid 3x^2 + 2y^2 = 4\}$ .
3. (\*) Βρείτε την συνάρτηση μήκους τόξου της καμπύλης με τύπο  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
4. Βρείτε την συνάρτηση μήκους τόξου της καμπύλης με τύπο  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \geq 0$ .
5. (\*) Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} x \sin z \, dS$  όταν  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [\pi, 2\pi]$ .
6. Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} \cos^2 z \, dS$  όταν  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
7. (\*) Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} xy \, dS$  όταν  $\sigma$  είναι καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  και  $(1, 1)$ .
8. Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} (x + y) \, dS$  όταν  $\sigma$  είναι καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, 1)$ .
9. Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} yz \, dS$  όταν  $\sigma$  είναι καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις  $y = x$  και  $z = x^2$  από το σημείο  $(0, 0, 0)$  μέχρι το σημείο  $(2, 2, 4)$ .
10. Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} (x + z) \, dS$  όταν  $\sigma$  είναι καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις  $z = x$  και  $y^2 + z^2 = 1$ .
11. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $f(x, y) = y^2$  κατά μήκος του γραφήματος της  $y = e^x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
12. Υπολογίστε το  $\int_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\sigma$  όταν  $\mathbf{f}(x, y) = (y, x)$  και  $\sigma$  είναι η καμπύλη που διαγράφει το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 1$  από το σημείο  $(1, 0)$  μέχρι το σημείο  $(0, 1)$ .
13. (\*) Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\sigma$  όταν  $\sigma(t) = (1, t, t^2)$ ,  $t \in [0, 2]$ , και  $f(x, y, z) = (y, z, x)$ .
14. Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\sigma$  όταν  $\sigma(t) = (t, e^t, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ , και  $f(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ .
15. Υπολογίστε το  $\int_{\sigma} (x \, dy - y \, dx)$  όταν  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
16. (\*) Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} (x \, dx + z \, dy + y \, dz)$  όταν  $\sigma$  είναι καμπύλη η οποία διαγράφει την τομή των επιφανειών με εξισώσεις  $x = y$  και  $z = e^y$  από το σημείο  $(0, 0, 1)$  στο σημείο  $(1, 1, e)$ .
17. (\*) Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} (y \, dx + x \, dy + z \, dz)$  όταν  $\sigma$  είναι η καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις  $y = 1$  και  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  με την θετική φορά περιστροφής καθώς κοιτάμε την τροχιά από το σημείο  $(0, 2, 0)$ .
18. Υπολογίστε το  $\int_{\sigma} (x \, dx + y \, dy + z \, dz)$  όταν  $\sigma$  είναι η καμπύλη που διαγράφει μία φορά το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  και  $(0, 0, 1)$  με την θετική φορά περιστροφής καθώς κοιτάμε την τροχιά από το σημείο  $(0, 0, 0)$ .
19. Υπολογίστε τό  $\int_{\sigma} (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$  όταν  $\sigma$  είναι η καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις  $x + y = 2$  και  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$  με την θετική φορά περιστροφής καθώς κοιτάμε την τροχιά από το σημείο  $(0, 0, 0)$ .

20. Με τί ισούται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $\mathbf{f}$  κατά μήκος της  $\sigma$  όταν σε κάθε σημείο  $\mathbf{a}$  της τροχιάς το  $\mathbf{f}(\mathbf{a})$  είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της τροχιάς στο σημείο  $\mathbf{a}$ ;
21. Με τί ισούται το  $\int_{\sigma} dS$ ;

### Απαντήσεις.

1.  $\sigma(t) = (t^4, 3 - \cos t, 5e^t), t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\sigma(t) = (t, t^2), t \in \mathbb{R}$ , και  $\rho(t) = ((2/\sqrt{3}) \cos t, \sqrt{2} \sin t), t \in [0, 2\pi]$ .
3.  $S(t) = t, t \in [0, 2\pi]$ .
4.  $S(t) = \sqrt{2}t, t \geq 0$ .
5. 0.
6.  $\pi\sqrt{2}$ .
7.  $(6 + \sqrt{2})/6$ .
8.  $1 + \sqrt{2}$ .
9.  $(149\sqrt{2})/15$ .
10. 0.
11.  $(e^2 + 1)^{3/2}/3 - 2^{3/2}/3$ .
12. 0.
13.  $20/3$ .
14.  $e + (1/2)$ .
15.  $2\pi$ .
16.  $e + (1/2)$ .
17. 0.
18. 0.
19.  $2\pi\sqrt{2}$ .
20. 0.
21. Με το μήκος της  $\sigma$ .