Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. (*) Σχεδιάστε την επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x + y + z = 1$ και $x^2 + 2y^2 \leq 1$ και υπολογίστε το εμβαδόν της.

2. (*) Υπολογίστε το εμβαδόν του τμήματος της σφαίρας κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας 1 που βρίσκεται πάνω από τον κώνο με εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. (*) Υπολογίστε το εμβαδόν της σφαίρας ακτίνας $R > 0$.

4. Θεωρήστε την επιφάνεια με τύπο $\mathbf{\Sigma}(u, v) = ((R + \cos u) \cos v, (R + \cos u) \sin v, \sin u)$, $u, v \in [0, 2\pi]$, με $R > 1$. Η επιφάνεια αυτή ονομάζεται *τόρος*. Σχεδιάστε την επιφάνεια και υπολογίστε το εμβαδόν της.

5. Σχεδιάστε την κυλινδρική επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 = R^2$ και $a \leq z \leq b$ και υπολογίστε το εμβαδόν της.

6. Είπαμε ότι τα δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα στο γράφημα μιας συνάρτησης $z = f(x, y)$ είναι τα $\mathbf{N} = \pm \frac{(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, -1)}{\sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}}$. Ποιό από αυτά κατευθύνεται προς τα πάνω;

7. Έστω $0 \leq a < b$ και συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$. Σχεδιάστε το γράφημα της f στο xz-επίπεδο καθώς και την επιφάνεια που προκύπτει με πλήρη περιστροφή του γραφήματος γύρω από τον z-άξονα. Πεισθήτε ότι η επιφάνεια αυτή μπορεί να παραμετρικοποιηθεί με την συνάρτηση $\mathbf{\Sigma}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$, $u \in [a, b], v \in [0, 2\pi]$, και υπολογίστε το εμβαδόν της.

8. Υπολογίστε ως διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 3, 3)$.

9. Σχεδιάστε την επιφάνεια με τύπο $\mathbf{\Sigma}(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, v)$, $u \in [0, 1], v \in [0, \pi]$, και υπολογίστε το εμβαδόν της.

10. Σχεδιάστε την επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 \leq 4$ και $z = xy$ και υπολογίστε το εμβαδόν της.

11. Αν $0 \leq a < b$, υπολογίστε το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας που ορίζεται από τις σχέσεις $z^2 = x^2 + y^2$ και $a \leq z \leq b$ με δύο τρόπους. (i) Χρησιμοποιήστε καρτεσιανές συντεταγμένες. (ii) Χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

12. Σχεδιάστε την επιφάνεια που ορίζεται από τις $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ και $0 < x^2 + y^2 \leq 1$. Αποδείξτε ότι δεν μπορούμε να βάψουμε την επιφάνεια αλλά μπορούμε να χτίσουμε τον χώρο που βρίσκεται κάτω από αυτήν και πάνω από το xy-επίπεδο.

Απαντήσεις.

1. $\pi\sqrt{3/2}$.
2. $\pi(2-\sqrt{2})$.
3. $4\pi R^2$.
4. $4\pi^2 R$.
5. $2\pi R(b-a)$.
6. Το **N** με το πρόσημο $-$.
7. $2\pi\int_a^b u\sqrt{(f'(u))^2+1}\,du$.
8. $\sqrt{21}/2$.
9. $\pi(e^2-1)/2$.
10. $2\pi(5\sqrt{5}-1)/3$.
11. $\pi(b^2-a^2)\sqrt{2}$.
12. Πεπερασμένος όγκος, άπειρο εμβαδόν.