

## Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

### Ένατο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (\*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. (\*) Υπολογίστε το  $\iint_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{\Sigma}$ , όπου  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, z, y)$  και  $\Sigma$  είναι η επιφάνεια η οποία περιγράφεται από τις  $x^2 + y^2 \leq 1$  και  $z = x + 3y$  και έχει τέτοιο προσανατολισμό ώστε τα κάθετα διανύσματα που επάγει να κατευθύνονται προς την πάνω μεριά της.
2. Υπολογίστε το  $\iint_{\Sigma} (y dy \wedge dz + z dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$ , όπου  $\Sigma$  είναι η επιφάνεια η οποία περιγράφεται από τις  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  και  $y \geq 0$  και έχει τέτοιο προσανατολισμό ώστε τα κάθετα διανύσματα που επάγει να κατευθύνονται μακριά από το σημείο  $(0, 0, 0)$ .
3. Υπολογίστε το  $\iint_{\Sigma} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy)$ , όπου  $\Sigma$  είναι η επιφάνεια η οποία περιγράφεται από τις  $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$  και  $0 \leq z \leq 1$  και έχει τέτοιο προσανατολισμό ώστε τα κάθετα διανύσματα που επάγει να κατευθύνονται μακριά από τον  $z$ -άξονα.
4. Υπολογίστε το  $\iint_{\Sigma} (2x dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx + (x^2 + y^2) dx \wedge dy)$ , όπου  $\Sigma$  είναι το σύνορο του φραγμένου χωρίου  $D$  που ορίζεται από τις  $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$  και έχει τέτοιο προσανατολισμό ώστε τα κάθετα διανύσματα που επάγει να κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά του χωρίου  $D$ .
5. (\*) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green, υπολογίστε το  $\oint_{\sigma} (y dx - x dy)$ , όπου  $\sigma$  είναι η συνοριακή καμπύλη του τετραγώνου  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το τετράγωνο.
6. (\*) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green, υπολογίστε το εμβαδόν ελλειπτικού χωρίου με ημιάξονες  $a, b > 0$
7. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green, υπολογίστε το  $\oint_{\sigma} ((y^2 + x^3) dx + x^4 dy)$ , όπου  $\sigma$  είναι η συνοριακή καμπύλη του τετραγώνου  $[0, 1] \times [0, 1]$  με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το τετράγωνο.
8. (\*) Επαληθεύστε το Θεώρημα του Green για τις συναρτήσεις  $P = -y/(x^2 + y^2)$  και  $Q = x/(x^2 + y^2)$  στον δακτύλιο που ορίζεται από τις  $0 < R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2$ .
9. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green, υπολογίστε το  $\oint_{\sigma} (2xy dx + 3xy^2 dy)$ , όπου  $\sigma$  είναι η συνοριακή καμπύλη του τετραπλεύρου με κορυφές  $(-2, 1), (-2, -3), (1, 0), (1, 7)$  με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το τετράπλευρο.
10. Θεωρούμε το χωρίο  $D$  που προκύπτει αν από το τετράγωνο  $[-2, 7] \times [-3, 6]$  αφαιρέσουμε τους δύο ανοικτούς δίσκους με κέντρο το σημείο  $(0, 0)$  και ακτίνα 1 και με κέντρο  $(3, 3)$  και ακτίνα 2. Υπολογίστε το  $\sum_{j=1}^3 \oint_{\sigma_j} \left( -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right)$ , όπου  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  είναι οι συνοριακές καμπύλες του  $D$  με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με το  $D$ . Μπορείτε να υπολογίσετε απευθείας τα επικαμπύλια ολοκληρώματα ή προτιμάτε να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα του Green;
11. Έστω βαθμωτή συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο χωρίο  $D$  και αρμονική  $\sigma'$  αυτό. Δηλαδή ισχύει  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  στο  $D$ . Αν  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  είναι οι συνοριακές κλειστές καμπύλες του  $D$  με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με το  $D$ , υπολογίστε το

$$\sum_{j=1}^k \oint_{\sigma_j} \left( \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right).$$

Μήπως η προηγούμενη άσκηση είναι ειδική περίπτωση αυτής εδώ;

12. Αποδείξτε ότι

$$\oint_{\sigma} (PQ dx + PQ dy) = \iint_D \left( Q \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + P \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right) dx dy.$$
$$\oint_{\sigma} \left( Q \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx + \left( P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = 2 \iint_D \left( P \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - Q \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) dx dy.$$

**Απαντήσεις.**

1. 0.
2. 2/3.
3. 12π.
4. 8π/3.
5. -8.
6. πab.
7. 0.
8. 0 = 0.
9. 332.25.
10. 0.
11. 0.