Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2017-18.

Τελικό διαγώνισμα, 11.01.2018.

1. Αν D είναι το παραλληλόγραμμο στο xy-επίπεδο με κορυφές τα σημεία $(-1,1)$, $(2,0)$, $(4,1)$, $(1,2)$, υπολογίστε το $\iint_D xy\,dxdy$, χρησιμοποιώντας γραμμική απεικόνιση η οποία μετασχηματίζει το D σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.

2. (α) Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, υπολογίστε το $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, όπου $D = \{(x,y,z)\,|\,1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, y \ge 0, z \le 0\}$.

   (β) Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες, υπολογίστε το $\iiint_D x\,dxdydz$, όταν $D = \{(x,y,z)\,|\,1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, 0 \le z \le x\}$.

3. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\boldsymbol{\sigma}}(-z\,dx+x^2\,dy+x\,dz)$, όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις $x^2+z^2=1$ και $y=-2$ με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το σημείο $(0,0,0)$. Σχεδιάστε την καμπύλη και την φορά διαγραφής της.

4. Είναι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}(x,y,z) = (0, \frac{-z}{y^2+z^2}, \frac{y}{y^2+z^2})$ συντηρητικό;

5. Με τί ισούται το $\iiint_\Omega \nabla\cdot\mathbf{f}\,dV$ όταν σε κάθε σημείο της συνοριακής επιφάνειας του χωρίου Ω το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}$ είναι εφαπτόμενο σ' αυτήν;

6. Υπολογίστε με δεύτερο τρόπο το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της άσκησης 3, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes και μια πολύ απλή επιφάνεια $\boldsymbol{\Sigma}$ η οποία έχει ως συνοριακή καμπύλη την $\boldsymbol{\sigma}$ του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Περιγράψτε προσεκτικά την κατεύθυνση των κάθετων διανυσμάτων $\mathbf{N}$ στην επιφάνεια.

Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις ώρες. Αποχώρηση μετά από 60 λεπτά. Απαγορεύονται βιβλία, σημειώσεις και κινητά (ακόμη κι αν είναι απενεργοποιημένα).

Καλή επιτυχία!
Μιχάλης Παπαδημητράκης.