Ολοκληρωτικός Λογισμός πολλών μεταβλητών

Πρόχειρες σημειώσεις

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

1η εβδομάδα.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \,|\, a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

στο $\mathbb{R}^2$ και μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$f : R \to \mathbb{R}$$

ορισμένη στο R. Συνήθως γράφουμε $z = f(x, y)$, όπου το (x, y) διατρέχει το R ή, ισοδύναμα, το x διατρέχει το $[a, b]$ και το y διατρέχει το $[c, d]$.

Θέλουμε να ορίσουμε το **διπλό ολοκλήρωμα** της f στο R. Αυτό θα γίνει με τρόπο ανάλογο του τρόπου ορισμού του απλού ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα του $\mathbb{R}$, παίρνοντας, δηλαδή, αθροίσματα Riemann και το όριό τους. Θα θεωρήσουμε διαμερίσεις του ορθογωνίου R σε μικρότερα ορθογώνια, μέσω αυτών των διαμερίσεων θα θεωρήσουμε τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann της f, και μέσω αυτών των αθροισμάτων Riemann, περνώντας στο όριο, θα προκύψει το διπλό ολοκλήρωμα της f στο R.

Ξεκινάμε με μια διαμέριση

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

του $[a, b]$ στον x-άξονα και με μια διαμέριση

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$$

του $[c, d]$ στον y-άξονα. Η πρώτη διαμέριση χωρίζει το $[a, b]$ σε n διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$, και η δεύτερη διαμέριση χωρίζει το $[c, d]$ σε m διαστήματα $[y_{j-1}, y_j]$, $1 \le j \le m$.

Κατόπιν σχεδιάζουμε τις κατακόρυφες ευθείες που τέμνουν τον x-άξονα στα σημεία της πρώτης διαμέρισης και τις οριζόντιες ευθείες που τέμνουν τον y-άξονα στα σημεία της δεύτερης διαμέρισης. Έτσι σχηματίζεται μια διαμέριση του ορθογωνίου R σε nm μικρότερα ορθογώνια

$$R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le m.$$

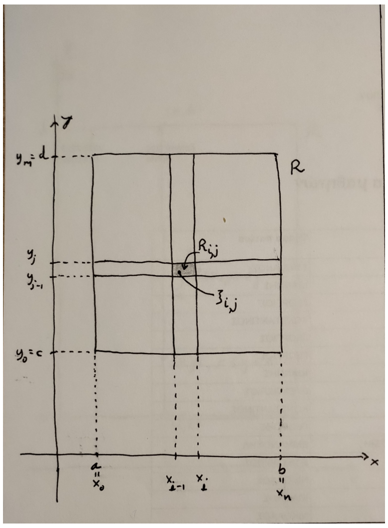
Όσο λεπτότερη είναι η διαμέριση του $[a, b]$, δηλαδή όσο μικρότερος είναι ο θετικός αριθμός

$$\max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

(το μεγαλύτερο από τα μήκη των $[x_{i-1}, x_i]$), και όσο λεπτότερη είναι η διαμέριση του $[c, d]$, δηλαδή όσο μικρότερος είναι ο θετικός αριθμός

$$\max_{1 \le j \le m}(y_j - y_{j-1}) = \max_{1 \le j \le m} \Delta y_j$$

(το μεγαλύτερο από τα μήκη των $[y_{j-1}, y_j]$), τόσο λεπτότερη λέμε ότι είναι η διαμέριση του ορθογωνίου R στα ορθογώνια $R_{i,j}$.



Κατόπιν, δεδομένης της διαμέρισης που θεωρήσαμε παραπάνω, θεωρούμε μέσα σε κάθε ορθογώνιο $R_{i,j}$ ένα τυχαίο σημείο $\xi_{i,j}$ και σχηματίζουμε το διπλό άθροισμα

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,A(R_{i,j}), \qquad (1)$$

όπου $A(R_{i,j}) = \Delta x_i \Delta y_j$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου $R_{i,j}$. Στο άθροισμα αυτό ο δείκτης i τρέχει από 1 έως n και ο δείκτης j τρέχει από 1 έως m. Το άθροισμα αυτό ονομάζεται **άθροισμα Riemann** της f, το οποίο ορίζεται από την συγκεκριμένη διαμέριση του ορθογωνίου R σε υποορθογώνια $R_{i,j}$ και από την συγκεκριμένη επιλογή "ενδιάμεσων" σημείων $\xi_{i,j}$ στα $R_{i,j}$.

Και τώρα έχουμε τον εξής βασικό ορισμό.

*Υποθέτουμε ότι όσο λεπτότερη είναι η διαμέριση του R στα υποορθογώνια $R_{i,j}$ τόσο πιο κοντά έρχεται το άθροισμα Riemann σε κάποιον συγκεκριμένο αριθμό. Αν συμβαίνει αυτό, τότε λέμε ότι η f είναι **(Riemann) ολοκληρώσιμη** στο R και ο αριθμός τον οποίο πλησιάζει το άθροισμα Riemann ονομάζεται **ολοκλήρωμα (Riemann)** της f στο R και συμβολίζεται*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \qquad \text{ή} \qquad \iint_R f.$$

Αν, λοιπόν, η f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο R, τότε έχουμε

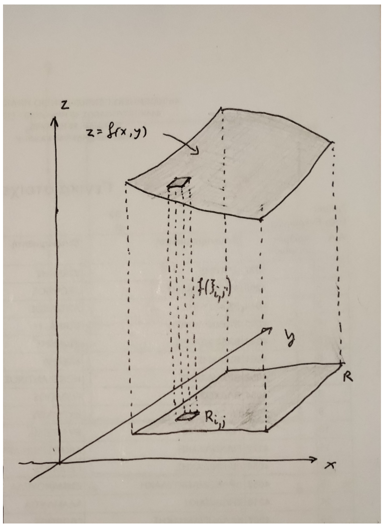
$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

όταν $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i \approx 0$ και $\max_{1\le j\le m} \Delta y_j \approx 0$ (όπου, $\approx$ σημαίνει περίπου ίσο). Ή, με άλλα λόγια,

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \to \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

όταν $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$ και $\max_{1\le j\le m} \Delta y_j \to 0$.

Αν η f είναι μη-αρνητική, δηλαδή αν ισχύει $f(x,y) \ge 0$ για κάθε $(x,y) \in R$, τότε ο όρος $f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j = f(\xi_{i,j})\,A(R_{i,j})$ ισούται με τον όγκο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου στον xyz-χώρο το οποίο έχει βάση το ορθογώνιο $R_{i,j}$ στο xy-επίπεδο και κατακόρυφο ύψος $f(\xi_{i,j})$, δηλαδή του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου το οποίο εκτείνεται κατακόρυφα πάνω από το xy-επίπεδο από το ορθογώνιο $R_{i,j}$ μέχρι το σημείο $(\xi_{i,j}, f(\xi_{i,j}))$ του γραφήματος της f. Άρα, σ' αυτήν περίπτωση, το άθροισμα Riemann (1) είναι το άθροισμα των όγκων όλων αυτών των ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων και άρα ισούται με τον όγκο της ένωσής τους. Όταν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο R και η διαμέριση είναι πολύ λεπτή τότε: (α) το άθροισμα Riemann προσεγγίζει (εξ ορισμού) το διπλό ολοκλήρωμα της f στο R, και (β) η ένωση των ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων προσεγγίζει το στερεό που βρίσκεται πάνω από το ορθογώνιο R και κάτω από την επιφάνεια/γράφημα της f και άρα ο όγκος της ένωσης των ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων προσεγγίζει τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο R και στο γράφημα της f.



Συμπεραίνουμε ότι:

Αν η f είναι μη-αρνητική και ολοκληρώσιμη στο R, τότε το διπλό ολοκλήρωμα της f στο R ισούται με τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο R και στο γράφημα της f.

Είδαμε μερικές ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος συνάρτησης σε ορθογώνιο.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο ορθογώνιο R, τότε και η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και ισχύει

$$\iint_R (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy. \tag{2}$$

Η απόδειξη πάει περίπου ως εξής. Θεωρούμε, όπως στην αρχή, μια διαμέριση του R σε ορθογώνια $R_{i,j}$, σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann της $f + g$ και κάνουμε πράξεις σ' αυτό ώστε να προκύψουν τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann των f και g ξεχωριστά:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n,m}(f(\xi_{i,j}) + g(\xi_{i,j}))\,\Delta x_i \Delta y_j &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n,m}(f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j + g(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j) \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j + \sum_{i,j=1}^{n,m} g(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j.\end{aligned} \tag{3}$$

Όταν $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i \approx 0$ και $\max_{1\le j\le m} \Delta y_j \approx 0$, επειδή οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο R συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R f(x,y)\,dxdy, \qquad \sum_{i,j=1}^{n,m} g(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R g(x,y)\,dxdy,$$

οπότε

$$\textstyle\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j + \sum_{i,j=1}^{n,m} g(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy. \tag{4}$$

Από τις (3) και (4) συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{i,j=1}^{n,m}(f(\xi_{i,j}) + g(\xi_{i,j}))\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy,$$

δηλαδή το άθροισμα Riemann της $f+g$ προσεγγίζει τον αριθμό $\iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy$. Άρα η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και το ολοκλήρωμά της στο R είναι ίσο με αυτόν τον αριθμό, δηλαδή ισχύει η σχέση (2).

Μια άλλη ιδιότητα είναι η εξής.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο R και λ είναι αριθμός, τότε και η λf είναι ολοκληρώσιμη στο R και ισχύει

$$\iint_R \lambda f(x,y)\,dxdy = \lambda \iint_R f(x,y)\,dxdy. \tag{5}$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Θεωρούμε μια διαμέριση του R σε ορθογώνια $R_{i,j}$, σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann της λf και κάνουμε πράξεις σ' αυτό ώστε να προκύψει το αντίστοιχο άθροισμα Riemann της f:

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} \lambda f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j = \lambda \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j. \tag{6}$$

Όταν $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i \approx 0$ και $\max_{1\le j\le m} \Delta y_j \approx 0$, επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο R συνεπάγεται

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R f(x,y)\,dxdy,$$

οπότε

$$\lambda \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \lambda \iint_R f(x,y)\,dxdy. \tag{7}$$

Από τις (6) και (7) συνεπάγεται

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} \lambda f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \lambda \iint_R f(x,y)\,dxdy,$$

δηλαδή το άθροισμα Riemann της λf προσεγγίζει τον αριθμό $\lambda \iint_R f(x,y)\,dxdy$. Άρα η λf είναι ολοκληρώσιμη στο R και το ολοκλήρωμά της στο R είναι ίσο με αυτόν τον αριθμό, δηλαδή ισχύει η σχέση (5).

Άλλη ιδιότητα.

Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο R και ισχύει $f(x,y) \le g(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in R$, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \le \iint_R g(x,y)\,dxdy. \tag{8}$$

Για την απόδειξη θεωρούμε μια διαμέριση του R σε ορθογώνια $R_{i,j}$, σχηματίζουμε τα αθροίσματα Riemann των f, g και τα συγκρίνουμε:

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i,j=1}^{n,m} g(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j,$$

διότι ισχύει $f(\xi_{i,j}) \le g(\xi_{i,j})$ για κάθε i, j. Επειδή

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R f(x,y)\,dxdy, \qquad \sum_{i,j=1}^{n,m} g(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

όταν $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i \approx 0$ και $\max_{1\le j\le m} \Delta y_j \approx 0$, από την ανισοτική σχέση ανάμεσα στα αθροίσματα Riemann περνάμε στην ανισοτική σχέση (8) ανάμεσα στα ολοκληρώματα.

Άλλη ιδιότητα.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο R τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και ισχύει

$$\left| \iint_R f(x,y)\,dxdy \right| \le \iint_R |f(x,y)|\,dxdy. \tag{9}$$

Δεν θα αποδείξουμε ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο R, διότι η απόδειξη είναι αρκετά περίπλοκη. Αλλά, υποθέτοντας ότι και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, θα δούμε ότι η ανισότητα (9) είναι απλή εφαρμογή της (8). Πράγματι, επειδή ισχύει

$$-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$$

για κάθε $(x,y) \in R$, από την (8) συνεπάγεται

$$\iint_R (-|f(x,y)|)\,dxdy \le \iint_R f(x,y)\,dxdy \le \iint_R |f(x,y)|\,dxdy.$$

Εφαρμόζοντας στο αριστερό μέλος την (5) με $\lambda = -1$, βρίσκουμε

$$-\iint_R |f(x,y)|\,dxdy \le \iint_R f(x,y)\,dxdy \le \iint_R |f(x,y)|\,dxdy$$

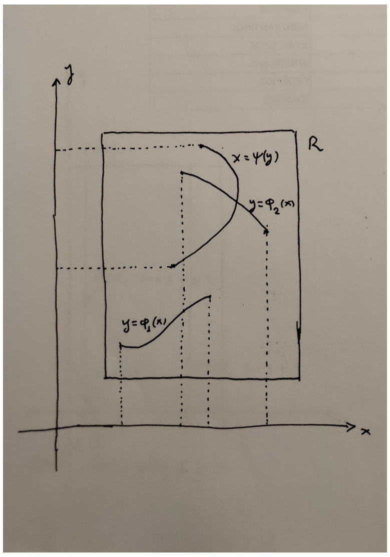
από όπου συνεπάγεται η (9).

Εννοείται ότι το σύμβολο $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ έχει νόημα μόνο όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο R. Γι αυτό, όταν χρησιμοποιούμε αυτό το σύμβολο, πρέπει πρώτα να έχουμε αποδείξει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο R. Συνήθως μια τέτοια απόδειξη είναι αρκετά περίπλοκη και γι αυτό διατυπώνουμε τώρα δύο θεωρήματα που μας εξασφαλίζουν την ολοκληρωσιμότητα δύο κατηγοριών συναρτήσεων τις οποίες συναντάμε πολύ συχνά στην πράξη. Το πρώτο θεώρημα είναι:

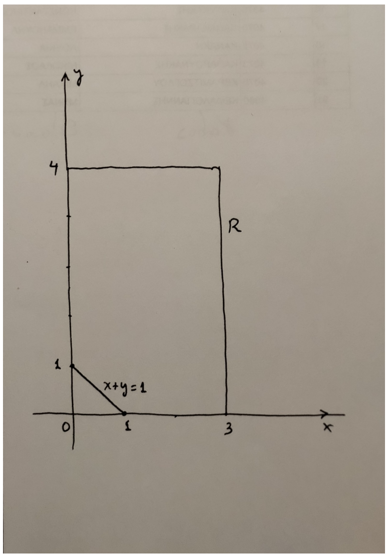
Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο ορθογώνιο R τότε είναι ολοκληρώσιμη στο R.

Το δεύτερο θεώρημα είναι γενίκευση του πρώτου.

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο ορθογώνιο R εκτός από κάποια σημεία ασυνέχειας τα οποία όλα βρίσκονται πάνω σε πεπερασμένου πλήθους καμπύλες μέσα στο R οι οποίες είναι γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων $y = \phi(x)$ ή $x = \psi(y)$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.



Παράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x,y) = x^2y + x$ είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$ και άρα είναι ολοκληρώσιμη σε οποιοδήποτε ορθογώνιο R.



Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση f που ορίζεται στο ορθογώνιο $R = [0,3] \times [0,4]$ με τύπο

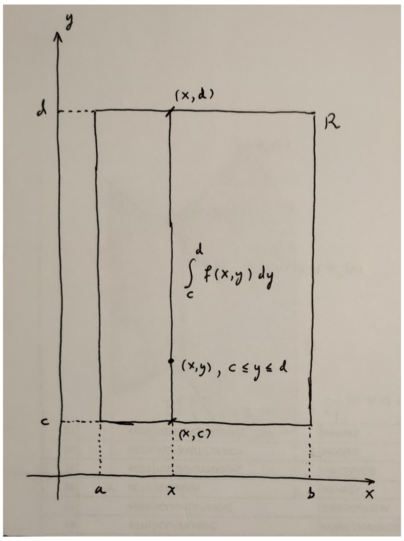
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + xy, & (x,y) \in R, x + y \geq 1 \\ xy^2, & (x,y) \in R, x + y < 1 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο R εκτός από τα σημεία του R που βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $x + y = 1$. Αυτά τα σημεία ασυνέχειας της f βρίσκονται όλα πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \phi(x) = 1 - x$ για $x \in [0, 1]$ (αλλά συγχρόνως και γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = \psi(y) = 1 - y$ για $y \in [0, 1]$). Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.

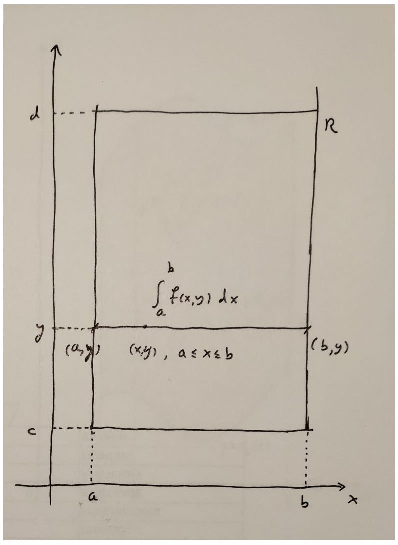
Αφού οι συναρτήσεις f στα δύο αυτά παραδείγματα είναι ολοκληρώσιμες προκύπτει το ερώτημα: πώς υπολογίζουμε τα ολοκληρώματά τους; Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων σπάνια βασιζόμαστε στον ορισμό του ολοκληρώματος (ως όριο αθροισμάτων Riemann). Είναι πολύ πιο πρακτικό να εφαρμόσουμε το επόμενο **θεώρημα του Fubini** το οποίο έχει δύο μορφές. Η πρώτη μορφή:

Θεώρημα του Fubini. *Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο $R = [a, b] \times [c, d]$, και αν για κάθε $x \in [a, b]$ η $f(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του y) στο διάστημα $[c, d]$, και αν η $\int_c^d f(x, y)\, dy$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του x) στο διάστημα $[a, b]$, τότε*

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\, dy \Big) dx. \tag{10}$$



Και η δεύτερη μορφή:



Θεώρημα του Fubini. *Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο $R = [a,b] \times [c,d]$, και αν για κάθε $y \in [c,d]$ η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του x) στο διάστημα $[a,b]$, και αν η $\int_a^b f(x,y)\,dx$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του y) στο διάστημα $[c,d]$, τότε*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy. \tag{11}$$

Συνήθως ισχύουν ταυτόχρονα οι προϋποθέσεις και για τις δύο συμμετρικές μορφές του θεωρήματος του Fubini και τότε έχουμε την διπλή ισότητα

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

Έτσι ο υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος ανάγεται στον υπολογισμό διαδοχικά δύο απλών ολοκληρωμάτων μίας μεταβλητής.

Πριν δούμε την απόδειξη του θεωρήματος του Fubini, ας το εφαρμόσουμε για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων στα δύο παραπάνω παραδείγματα.

Παράδειγμα. Στο πρώτο παράδειγμα η f είναι συνεχής στο ορθογώνιο $R = [0,3] \times [1,4]$ και άρα ολοκληρώσιμη στο R. Επίσης, για κάθε $x \in [0,3]$ η $f(x,y) = x^2y + x$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του y στο $[1,4]$ (με σταθερό x) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[1,4]$. Για κάθε $x \in [0,3]$ υπολογίζουμε

$$\int_1^4 (x^2y + x)\,dy = (x^2\tfrac{y^2}{2} + xy)\Big|_1^4 = (8x^2 + 4x) - (\tfrac{x^2}{2} + x) = \tfrac{15x^2}{2} + 3x.$$

Τώρα, επειδή η $\int_1^4 (x^2y + x)\,dy = \frac{15x^2}{2} + 3x$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη ως συνάρτηση του x στο $[0,3]$, από τον τύπο (10) έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2y + x)\,dxdy &= \int_0^3 \Big(\int_1^4 (x^2y + x)\,dy\Big)\,dx = \int_0^3 (\tfrac{15x^2}{2} + 3x)\,dx\\ &= (\tfrac{5x^3}{2} + \tfrac{3x^2}{2})\Big|_0^3 = \tfrac{135}{2} + \tfrac{27}{2} = 81.\end{aligned}$$

Ομοίως, για κάθε $y \in [1,4]$ η $f(x,y) = x^2y + x$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του x στο $[0,3]$ (με σταθερό y) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[0,3]$. Για κάθε $y \in [1,4]$ υπολογίζουμε

$$\int_0^3 (x^2y + x)\,dx = (\tfrac{x^3}{3}y + \tfrac{x^2}{2})\Big|_0^3 = 9y + \tfrac{9}{2}.$$

Επειδή η $\int_0^3 (x^2y + x)\,dx = 9y + \frac{9}{2}$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη ως συνάρτηση του y στο $[1,4]$, από τον τύπο (11) έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2y + x)\,dxdy &= \int_1^4 \Big(\int_0^3 (x^2y + x)\,dx\Big)\,dy = \int_1^4 (9y + \tfrac{9}{2})\,dy\\ &= (\tfrac{9y^2}{2} + \tfrac{9y}{2})\Big|_1^4 = 90 - 9 = 81.\end{aligned}$$

Και με τους δύο τύπους βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα: απολύτως φυσιολογικό και αναμενόμενο διότι το ολοκλήρωμα πρέπει να έχει μόνο μία τιμή.

Παράδειγμα. Τώρα έχουμε τη συνάρτηση f στο ορθογώνιο $R = [0,3] \times [0,4]$ με τύπο

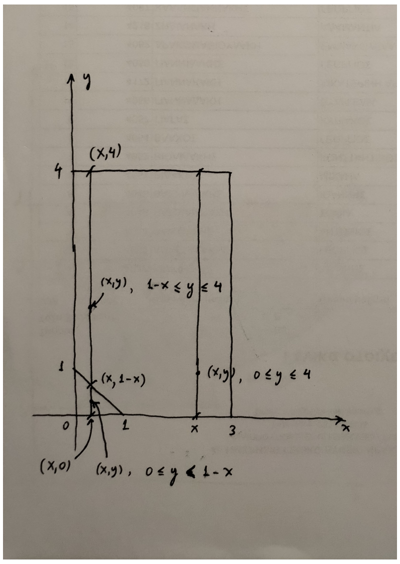
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + xy, & (x,y) \in R, x + y \geq 1\\ xy^2, & (x,y) \in R, x + y < 1\end{cases}$$

Είδαμε ήδη ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο R. Ας πάρουμε ένα $x \in [0,3]$. Αν $x \in [1,3]$, τότε ισχύει $f(x,y) = x^2 + xy$ για κάθε $y \in [0,4]$ (διότι $x + y \geq 1$), οπότε η $f(x,y) = x^2 + xy$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του y στο $[0,4]$ (με σταθερό x) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[0,4]$. Μάλιστα,

$$\int_0^4 f(x,y)\,dy = \int_0^4 (x^2 + xy)\,dy = (x^2y + x\tfrac{y^2}{2})\Big|_0^4 = 4x^2 + 8x, \qquad \text{όταν } x \in [1,3].$$

Τώρα έστω $x \in [0,1)$. Τότε $f(x,y) = xy^2$ για $y \in [0, 1-x)$ (διότι $x + y < 1$) και $f(x,y) = x^2 + xy$ για $y \in [1-x, 4]$ (διότι $x + y \geq 1$). Δηλαδή η f είναι τμηματικά συνεχής ως συνάρτηση του y στο $[0,4]$ και άρα ολοκληρώσιμη στο $[0,4]$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x,y)\,dy &= \int_0^{1-x} xy^2\,dy + \int_{1-x}^4 (x^2+xy)\,dy = \big(x\tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_0^{1-x} + \big(x^2y + x\tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_{1-x}^4 \\ &= \tfrac{53x}{6} + x^2 + \tfrac{5x^3}{2} - \tfrac{x^4}{3}, \qquad \text{όταν } x \in [0,1).\end{aligned}$$



Άρα η συνάρτηση $\int_0^4 f(x,y)\,dy$ έχει διπλό τύπο ως συνάρτηση του x στο $[0,3]$: είναι ίση με $\frac{53x}{6} + x^2 + \frac{5x^3}{2} - \frac{x^4}{3}$ στο $[0,1)$ και ίση με $4x^2 + 8x$ στο $[1,3]$. Άρα είναι τμηματικά συνεχής (και μάλιστα συνεχής!) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[0,3]$ και από τον τύπο (10) έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dxdy &= \int_0^3 \Big(\int_0^4 f(x,y)\,dy\Big)\,dx \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^4 f(x,y)\,dy\Big)\,dx + \int_1^3 \Big(\int_0^4 f(x,y)\,dy\Big)\,dx \\ &= \int_0^1 \big(\tfrac{53x}{6} + x^2 + \tfrac{5x^3}{2} - \tfrac{x^4}{3}\big)\,dx + \int_1^3 (4x^2 + 8x)\,dx \\ &= \big(\tfrac{53x^2}{12} + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{5x^4}{8} - \tfrac{x^5}{15}\big)\Big|_0^1 + \big(\tfrac{4x^3}{3} + 4x^2\big)\Big|_1^3 = -\tfrac{1}{40}.\end{aligned}$$

Το ίδιο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί (και θα βρεθεί το ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα) και με τον τύπο $\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_0^4 \big(\int_0^3 f(x,y)\,dx\big)\,dy$, αλλά ας το κάνει ο αναγνώστης.

Ας δούμε τώρα μια κάπως πρόχειρη απόδειξη του θεωρήματος του Fubini στην πρώτη μορφή του, την ισότητα (10). Θεωρούμε μια πολύ λεπτή διαμέριση του ορθογωνίου R σε ορθογώνια $R_{i,j}$ η οποία προκύπτει από μια πολύ λεπτή διαμέριση $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ του διαστήματος $[a,b]$ στον x-άξονα και από μια πολύ λεπτή διαμέριση $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$ του διαστήματος $[c,d]$ στον y-άξονα. Επίσης, θεωρούμε ενδιάμεσα σημεία $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ για $1 \leq i \leq n$ και ενδιάμεσα σημεία $\zeta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ για $1 \leq j \leq m$. Τότε το σημείο $\xi_{i,j} = (\eta_i, \zeta_j)$ ανήκει στο ορθογώνιο $R_{i,j}$ και σχηματίζουμε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j &= \sum_{i,j=1}^{n,m} f(\eta_i, \zeta_j)\,\Delta x_i \Delta y_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{j=1}^{m} f(\eta_i, \zeta_j)\,\Delta x_i \Delta y_j\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{j=1}^{m} f(\eta_i, \zeta_j)\,\Delta y_j\big)\,\Delta x_i.\end{aligned}$$

Επειδή η διαμέριση $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$ είναι πολύ λεπτή, έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{m} f(\eta_i, \zeta_j)\,\Delta y_j \approx \int_c^d f(\eta_i, y)\,dy.$$

(Εδώ έχουμε σταθερή τιμή $x = \eta_i$ για το x και ολοκλήρωμα στο διάστημα $[c,d]$ της $f(\eta_i, y)$ ως συνάρτησης του y.) Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_c^d f(\eta_i, y)\,dy \Big) \Delta x_i.$$

Αν ορίσουμε συνάρτηση με τύπο $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ για $x \in [a,b]$, τότε η τελευταία προσεγγιστική ισότητα γράφεται

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \sum_{i=1}^{n} g(\eta_i)\,\Delta x_i$$

και, επειδή έχουμε υποθέσει ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και η διαμέριση $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ είναι πολύ λεπτή, συνεπάγεται

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \sum_{i=1}^{n} g(\eta_i)\,\Delta x_i \approx \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big) dx.$$

Από την άλλη μεριά, επειδή η διαμέριση του R στα ορθογώνια $R_{i,j}$ είναι πολύ λεπτή και η f είναι ολοκληρώσιμη στο R, έχουμε ότι

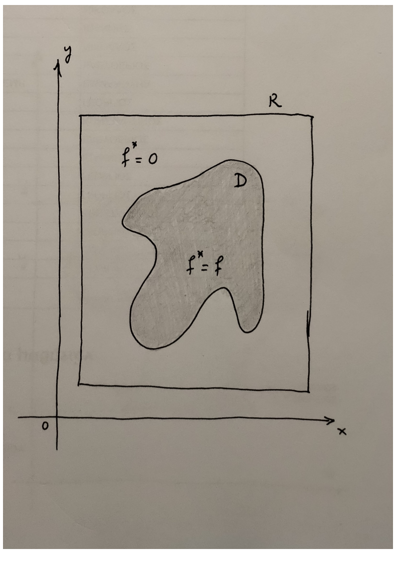
$$\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\xi_{i,j})\,\Delta x_i \Delta y_j \approx \iint_R f(x,y)\,dxdy.$$

Από τις δύο τελευταίες προσεγγιστικές ισότητες βλέπουμε ότι το άθροισμα Riemann της f στο R προσεγγίζει τον αριθμό $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ αλλά και τον αριθμό $\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big) dx$ και άρα αυτοί οι δύο αριθμοί πρέπει να είναι ίσοι. Έτσι αποδείξαμε τον τύπο (10). Ο τύπος (11) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει την έννοια του διπλού ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης ορισμένης σε ορθογώνιο, έχουμε δει μερικές ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος σε ορθογώνιο καθώς και το θεώρημα του Fubini που χρησιμεύει για τον υπολογισμό διπλού ολοκληρώματος σε ορθογώνιο. Τώρα θα δούμε πώς ορίζεται η έννοια του διπλού ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης σε γενικότερο φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^2$.

Έστω D ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^2$ και πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ ορισμένη στο D. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο R αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει το χωρίο D και ορίζουμε την επέκταση της f η οποία είναι ταυτοτικά ίση με 0 μέσα στο R και έξω από το D, δηλαδή την συνάρτηση $f^* : D \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$



Θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο D όταν η f^* είναι ολοκληρώσιμη στο R και σ' αυτήν την περίπτωση ορίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα της f στο D με τον τύπο

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy := \iint_R f^*(x,y)\,dxdy. \tag{12}$$

Θα συγκεκριμενοποιήσουμε αυτόν τον ορισμό σε δύο χαρακτηριστικές και απλές περιπτώσεις χωρίων D.

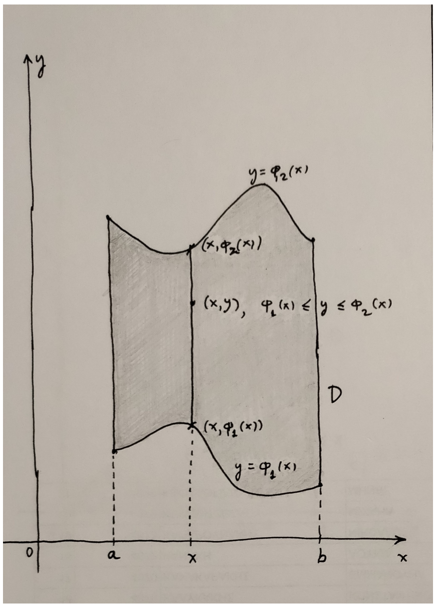
Χωρία πρώτου τύπου. Θεωρούμε δύο πραγματικές συναρτήσεις $y = \phi_1(x)$ και $y = \phi_2(x)$ ορισμένες και *συνεχείς* στο ίδιο διάστημα $[a, b]$ και υποθέτουμε ότι ισχύει

$$\phi_1(x) \le \phi_2(x) \qquad \text{για } x \in [a, b].$$

Δηλαδή το γράφημα της ϕ_1 βρίσκεται κάτω από το γράφημα της ϕ_2 στο xy-επίπεδο, οπότε σχηματίζεται το χωρίο D το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στις δυο αυτές (συνεχείς) καμπύλες:

$$D = \{(x, y) \,|\, a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}.$$

Αυτό το χωρίο D λέμε ότι είναι *χωρίο πρώτου τύπου.*



Το χωρίο πρώτου τύπου D μπορούμε να το περιγράψουμε γεωμετρικά ως εξής. Θεωρούμε μια μεταβλητή κατακόρυφη ευθεία η οποία τέμνει τον x-άξονα στο μεταβλητό σημείο x. Όταν $x < a$ η κατακόρυφη ευθεία δεν τέμνει το D. Ομοίως, όταν $x > b$ η κατακόρυφη ευθεία δεν τέμνει το D. Όταν $a \le x \le b$ η κατακόρυφη ευθεία τέμνει το D σε ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο έχει ως κάτω άκρο το σημείο $(x, \phi_1(x))$, ως άνω άκρο το σημείο $(x, \phi_2(x))$, οπότε τα σημεία του είναι ακριβώς όλα τα (x, y) με $\phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)$. Όλα μαζί τα κάτω σημεία των μεταβλητών κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(x, \phi_1(x))$ για $x \in [a, b]$, σχηματίζουν την καμπύλη που αποτελεί την κάτω πλευρά του D. Ενώ όλα μαζί τα πάνω σημεία των μεταβλητών κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(x, \phi_2(x))$ για $x \in [a, b]$, σχηματίζουν την καμπύλη που αποτελεί την πάνω πλευρά του D. Καθώς το x αυξάνεται στο $[a, b]$, το αντίστοιχο κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα "σαρώνει" το χωρίο D από αριστερά προς δεξιά.

Υποθέτουμε ότι σ' αυτό το χωρίο D είναι ορισμένη μια πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ και θα βρούμε έναν χρήσιμο τύπο για τον υπολογισμό του ολοκληρώματός της. Παίρνουμε ένα ορθογώνιο $R = [a', b'] \times [c', d']$ το οποίο περιέχει το χωρίο D. Για να ισχύει αυτό πρέπει να είναι $a' \le a$, $b \le b'$, το c' να μην είναι μεγαλύτερο από την ελάχιστη τιμή της ϕ_1 στο $[a, b]$ και το d'

να μην είναι μικρότερο από την μέγιστη τιμή της ϕ_2 στο $[a,b]$. Ορίζουμε την επέκταση f^* της f όπως πριν. Βάσει του ορισμού έχουμε τον τύπο (12) και, σύμφωνα με τον τύπο (10) του Fubini,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{a'}^{b'} \Big(\int_{c'}^{d'} f^*(x,y)\,dy \Big)\,dx. \tag{13}$$

Αν $x \in [a',a)$, τότε για κάθε $y \in [c',d']$ το σημείο (x,y) είναι στο R αλλά έξω από το D και άρα $f^*(x,y) = 0$. Επομένως,

$$\int_{c'}^{d'} f^*(x,y)\,dy = \int_{c'}^{d'} 0\,dy = 0 \qquad \text{αν } x \in [a',a). \tag{14}$$

Ομοίως, αν $x \in (b,b']$, τότε για κάθε $y \in [c',d']$ το σημείο (x,y) είναι στο R αλλά έξω από το D και άρα $f^*(x,y) = 0$. Επομένως,

$$\int_{c'}^{d'} f^*(x,y)\,dy = \int_{c'}^{d'} 0\,dy = 0 \qquad \text{αν } x \in (b,b']. \tag{15}$$

Κατόπιν, αν $x \in [a,b]$, τότε οι τιμές της $f^*(x,y)$ ως συνάρτησης του y στο διάστημα $[c',d']$ (με σταθερό το x) είναι τριών ειδών. Αν $y \in [c',\phi_1(x))$, τότε το σημείο (x,y) είναι εκτός του D, οπότε $f^*(x,y) = 0$. Αν $y \in (\phi_2(x),d']$, τότε πάλι το σημείο (x,y) είναι εκτός του D, οπότε $f^*(x,y) = 0$. Τέλος, αν $y \in [\phi_1(x),\phi_2(x)]$, τότε το σημείο (x,y) είναι εντός του D και άρα $f^*(x,y) = f(x,y)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{c'}^{d'} f^*(x,y)\,dy &= \int_{c'}^{\phi_1(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{\phi_2(x)}^{d'} f^*(x,y)\,dy \\ &= \int_{c'}^{\phi_1(x)} 0\,dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy + \int_{\phi_2(x)}^{d'} 0\,dy \\ &= \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad \text{αν } x \in [a,b].\end{aligned} \tag{16}$$

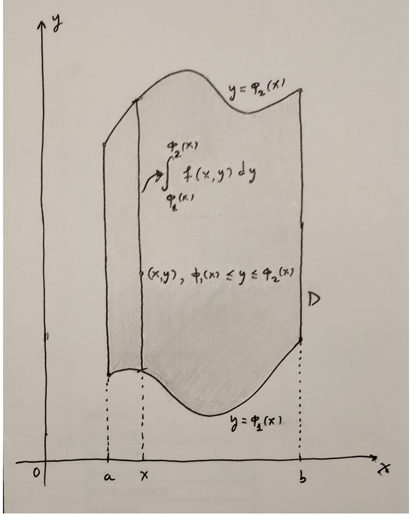
Από τις ισότητες (13)-(16) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_{a'}^{a} \Big(\int_{c'}^{d'} f^*(x,y)\,dy \Big)\,dx + \int_a^b \Big(\int_{c'}^{d'} f^*(x,y)\,dy \Big)\,dx \\ &\quad + \int_b^{b'} \Big(\int_{c'}^{d'} f^*(x,y)\,dy \Big)\,dx \\ &= \int_{a'}^{a} 0\,dx + \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \Big)\,dx + \int_b^{b'} 0\,dx \\ &= \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.\end{aligned}$$

Καταλήγουμε στον τύπο

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy \Big)\,dx} \tag{17}$$

όταν το χωρίο D είναι πρώτου τύπου: $D = \{(x,y)\,|\, a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$.



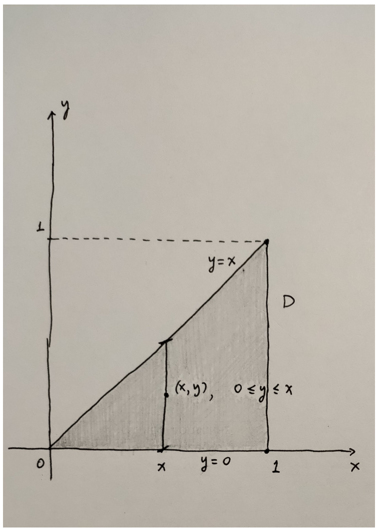
Επιστρέφοντας στην γεωμετρική περιγραφή του D, μπορούμε να πούμε ότι για να υπολογίσουμε το $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ σύμφωνα με τον τύπο (17), θεωρούμε το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα που είναι η τομή του D με την κατακόρυφη ευθεία που περνάει από το $x \in [a,b]$ και ότι ολοκληρώνουμε τις τιμές της f στα σημεία (x,y) αυτού του ευθυγράμμου τμήματος, όπου το x είναι σταθερό και η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το y από $y = \phi_1(x)$ μέχρι $y = \phi_2(x)$ (η μικρότερη τιμή του y και η μεγαλύτερη τιμή του y, αντιστοίχως, στο συγκεκριμένο ευθύγραμμο τμήμα). Έτσι, για κάθε $x \in [a,b]$ βρίσκουμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$ στο αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν, καθώς το x αυξάνεται στο $[a,b]$ και το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα σαρώνει το D από αριστερά προς δεξιά, ολοκληρώνουμε τις τιμές των ολοκληρωμάτων που βρήκαμε για x από a μέχρι b και βρίσκουμε το $\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το τριγωνικό χωρίο D με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$. Το D είναι χωρίο πρώτου τύπου: η κάτω πλευρά του είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \phi_1(x) = 0$ στο x-διάστημα $[0,1]$ και η πάνω πλευρά του είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \phi_2(x) = x$ στο ίδιο x-διάστημα $[0,1]$. Το D γράφεται

$$D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y)\,dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_0^x (x^2+y)\,dy \Big) dx = \int_0^1 \big(x^2 y + \tfrac{y^2}{2}\big)\Big|_0^x \,dx \\ &= \int_0^1 \big(x^3 + \tfrac{x^2}{2}\big)\,dx = \big(\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{x^3}{6}\big)\Big|_0^1 = \tfrac{5}{12}.\end{aligned}$$



Χωρία δεύτερου τύπου. Θεωρούμε δύο πραγματικές συναρτήσεις $x = \psi_1(y)$ και $x = \psi_2(y)$ ορισμένες και *συνεχείς* στο ίδιο διάστημα $[c,d]$ και υποθέτουμε ότι ισχύει

$$\psi_1(y) \le \psi_2(y) \qquad \text{για } y \in [c,d].$$

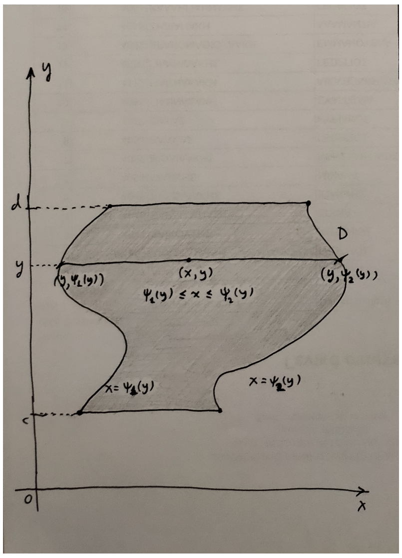
Δηλαδή το γράφημα της ψ_1 βρίσκεται αριστερά του γραφήματος της ψ_2 στο xy-επίπεδο, οπότε σχηματίζεται το χωρίο D το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στις δυο αυτές (συνεχείς) καμπύλες:

$$D = \{(x,y) \,|\, c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}.$$

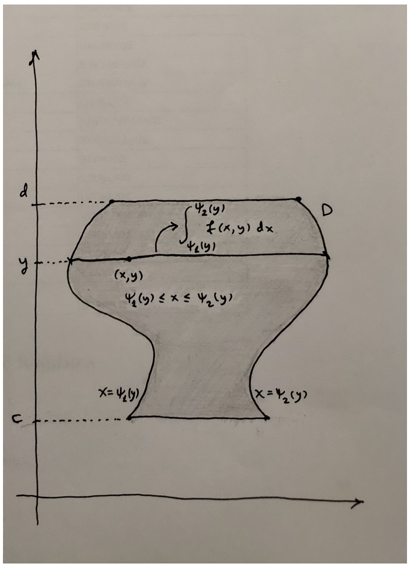
Αυτό το χωρίο D λέμε ότι είναι *χωρίο δεύτερου τύπου*.

Υποθέτουμε και ότι στο χωρίο D είναι ορισμένη μια πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$. Αν ακολουθήσουμε παρόμοια βήματα με αυτά για τα χωρία πρώτου τύπου χρησιμοποιώντας τον τύπο (11) του Fubini (αντί του (10)) θα καταλήξουμε στον εξής τύπο υπολογισμού του διπλού ολοκληρώματος της f στο D:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \Big) dy.} \tag{18}$$



Το χωρίο δεύτερου τύπου D μπορούμε, όπως και ένα χωρίο πρώτου τύπου, να το περιγράψουμε γεωμετρικά ως εξής. Θεωρούμε μια μεταβλητή οριζόντια ευθεία η οποία τέμνει τον y-άξονα στο μεταβλητό σημείο y. Όταν $y < c$ η οριζόντια ευθεία δεν τέμνει το D. Ομοίως, όταν $y > d$ η οριζόντια ευθεία δεν τέμνει το D. Όταν $c \leq y \leq d$ η οριζόντια ευθεία τέμνει το D σε ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο έχει ως αριστερό άκρο το σημείο $(\psi_1(y), y)$, ως δεξιό άκρο το σημείο $(\psi_2(y), y)$, οπότε τα σημεία του είναι ακριβώς όλα τα (x, y) με $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$. Όλα μαζί τα αριστερά σημεία των μεταβλητών οριζόντιων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(\psi_1(y), y)$ για $y \in [c, d]$, σχηματίζουν την καμπύλη που αποτελεί την αριστερή πλευρά του D. Ενώ όλα μαζί τα δεξιά σημεία των μεταβλητών οριζόντιων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(\psi_2(y), y)$ για $y \in [c, d]$, σχηματίζουν την καμπύλη που αποτελεί την δεξιά πλευρά του D. Καθώς το y αυξάνεται στο $[c, d]$, το αντίστοιχο οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα "σαρώνει" το χωρίο D από κάτω προς πάνω.



Με ανάλογη κάπως γεωμετρική γλώσσα μπορούμε να πούμε ότι για να υπολογίσουμε το $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ σύμφωνα με τον τύπο (18), θεωρούμε το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα που είναι η τομή του D με την οριζόντια ευθεία που περνάει από το $y \in [c, d]$ και ότι ολοκληρώνουμε τις τιμές της f στα σημεία (x, y) αυτού του ευθυγράμμου τμήματος, όπου το y είναι σταθερό και η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το x από $x = \psi_1(y)$ μέχρι $x = \psi_2(y)$ (η μικρότερη τιμή του x και η μεγαλύτερη τιμή του x, αντιστοίχως, στο συγκεκριμένο ευθύγραμμο τμήμα). Έτσι, για κάθε $y \in [c, d]$ βρίσκουμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx$ στο αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν, καθώς το y αυξάνεται στο $[c, d]$ και το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα σαρώνει το D από κάτω προς πάνω, ολοκληρώνουμε τις τιμές των ολοκληρωμάτων που βρήκαμε για y από c μέχρι d και βρίσκουμε το $\iint_D f(x, y)\, dxdy$.

Παράδειγμα. Το τριγωνικό χωρίο D με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(1, 1)$ που είδαμε στο αμέσως προηγούμενο παράδειγμα είναι και χωρίο δεύτερου τύπου: η αριστερή πλευρά του είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = \psi_1(y) = y$ στο y-διάστημα $[0, 1]$ και η δεξιά πλευρά του είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = \psi_2(y) = 1$ στο ίδιο y-διάστημα $[0, 1]$. Το D γράφεται

$$D = \{(x, y) \,|\, 0 \le y \le 1, y \le x \le 1\}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + y)\, dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_y^1 (x^2 + y)\, dx \Big)\, dy = \int_0^1 \big(\tfrac{x^3}{3} + xy\big)\Big|_y^1\, dy \\ &= \int_0^1 \big(\tfrac{1}{3} + y - \tfrac{y^3}{3} - y^2\big)\, dy = \big(\tfrac{y}{3} + \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^4}{12} - \tfrac{y^3}{3}\big)\Big|_0^1 = \tfrac{5}{12}.\end{aligned}$$