Ολοκληρωτικός Λογισμός πολλών μεταβλητών

Πρόχειρες σημειώσεις

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2η εβδομάδα.

Οι ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος συνάρτησης σε ορθογώνιο ισχύουν και για το διπλό ολοκλήρωμα σε γενικότερο χωρίο.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο χωρίο D τότε και η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy. \tag{1}$$

Η απόδειξη βασίζεται στο ότι η ίδια ιδιότητα ισχύει για ορθογώνιο. Θεωρούμε ορθογώνιο R το οποίο περιέχει το χωρίο D και τις συναρτήσεις f^* και g^* οι οποίες είναι ίσες με τις f και g αντιστοίχως στο D και ίσες με 0 στο $R \setminus D$. Τότε έχουμε ότι στο D ισχύει $f^* + g^* = f + g$ και ότι στο $R \setminus D$ ισχύει $f^* + g^* = 0 + 0 = 0$. Άρα η συνάρτηση $f^* + g^*$ είναι ίση με την $(f + g)^*$ στο ορθογώνιο R. Επομένως, από τον ορισμό των ολοκληρωμάτων στο D έχουμε ότι

$$\iint_D (f + g)(x,y)\,dxdy = \iint_R (f + g)^*(x,y)\,dxdy = \iint_R (f^*(x,y) + g^*(x,y))\,dxdy, \tag{2}$$

και φυσικά

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R f^*(x,y)\,dxdy, \qquad \iint_D g(x,y)\,dxdy = \iint_R g^*(x,y)\,dxdy. \tag{3}$$

Η (2) προφανώς γράφεται και

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint_R (f^*(x,y) + g^*(x,y))\,dxdy. \tag{4}$$

Από την γνωστή ιδιότητα του αθροίσματος για το ορθογώνιο R έχουμε ότι το άθροισμα των δεξιών μερών των ισοτήτων (3) ισούται με το δεξιό μέρος της ισότητας (4). Άρα από τις (3) και (4) προκύπτει αμέσως η (1).

Με παρόμοιο τρόπο, δηλαδή βάσει του ότι οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν για ορθογώνιο, αποδεικνύονται και οι επόμενες τρεις ιδιότητες.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D και λ είναι αριθμός, τότε και η λf είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\iint_D \lambda f(x,y)\,dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dxdy. \tag{5}$$

Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο χωρίο D και ισχύει $f(x,y) \le g(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$, τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \le \iint_D g(x,y)\,dxdy. \tag{6}$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\Big| \iint_D f(x,y)\,dxdy \Big| \le \iint_D |f(x,y)|\,dxdy. \tag{7}$$

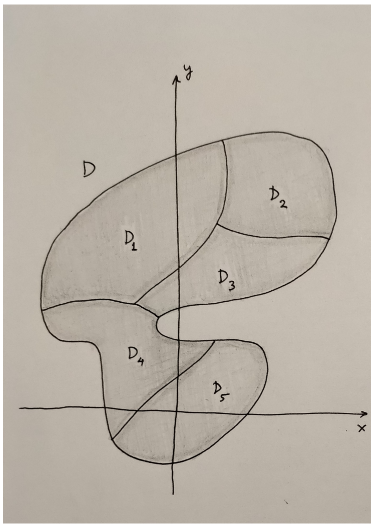
Όπως είχαμε πει στην περίπτωση ορθογωνίου, εννοείται ότι και για γενικότερο χωρίο D το σύμβολο $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ έχει νόημα μόνο όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο D. Γι αυτό, όταν χρησιμοποιούμε αυτό το σύμβολο, πρέπει πρώτα να έχουμε αποδείξει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο D. Ένα θεώρημα το οποίο εξασφαλίζει την ολοκληρωσιμότητα συνάρτησης σε χωρίο είναι το εξής:

Αν το σύνορο του χωρίου D αποτελείται απο πεπερασμένου πλήθους καμπύλες οι οποίες είναι γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων $y = \phi(x)$ ή $x = \psi(y)$ και αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο χωρίο D εκτός από κάποια σημεία ασυνέχειας τα οποία όλα βρίσκονται πάνω σε πεπερασμένου πλήθους καμπύλες μέσα στο D οι οποίες είναι γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων $y = \phi(x)$ ή $x = \psi(y)$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο D.

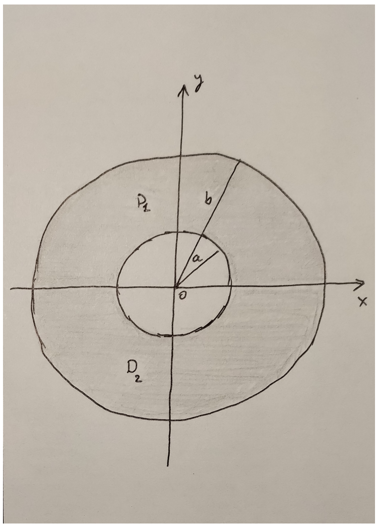
Μία ακόμη ιδιότητα είναι η εξής:

Αν τα χωρία $D_1, \ldots, D_k$ ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, και αν το χωρίο D είναι το $D = D_1 \cup \ldots \cup D_k$, και αν η f είναι ολοκληρώσιμη στα χωρία $D, D_1, \ldots, D_k$, τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \cdots + \iint_{D_k} f(x,y)\,dxdy. \tag{8}$$



Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ολοκλήρωμα σε χωρίο D το οποίο δεν είναι πρώτου ούτε δεύτερου τύπου, αρκεί να μπορούμε να χωρίσουμε το D σε μικρότερα χωρία $D_1, \ldots, D_k$ καθένα από τα οποία είναι πρώτου ή δεύτερου τύπου: υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα στα μικρότερα χωρία χρησιμοποιώντας τους τύπους (17) και (18) των σημειώσεων της πρώτης εβδομάδας, ανάλογα με την περίπτωση, και εφαρμόζουμε τον τύπο (8).



Παράδειγμα. Με $0 < a < b$, ο δακτύλιος

$$D = \{(x,y)\,|\,a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$$

ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα στους κύκλους κέντρου $(0,0)$ και ακτίνων a και b, δεν είναι πρώτου ούτε δεύτερου τύπου χωρίο. Όμως, $D = D_1 \cup D_2$, όπου D_1 είναι το τμήμα του D που βρίσκεται στο άνω xy-ημιεπίπεδο και D_2 είναι το τμήμα του D που βρίσκεται στο κάτω xy-ημιεπίπεδο:

$$D_1 = \{(x,y) \,|\, a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2, y \ge 0\}, \qquad D_2 = \{(x,y) \,|\, a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2, y \le 0\}.$$

Τα χωρία D_1, D_2 δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, και είναι και τα δύο πρώτου τύπου.

Όπως στην περίπτωση ορθογωνίου έτσι και για γενικότερο χωρίο D, το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας του ολοκληρώματος μη-αρνητικής συνάρτησης περιγράφεται ως εξής:

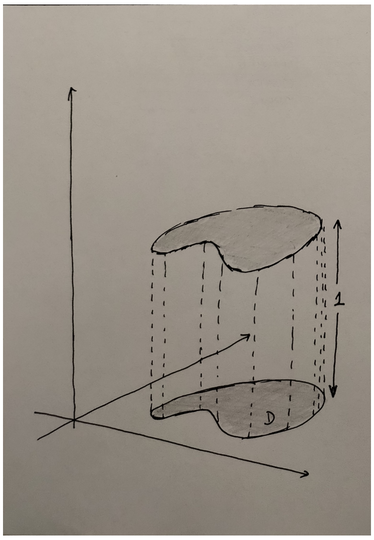
Αν η f είναι μη-αρνητική και ολοκληρώσιμη στο χωρίο D, τότε το διπλό ολοκλήρωμα της f στο D ισούται με τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο D και στο γράφημα της f.

Ας δούμε ένα χρήσιμο πόρισμα αυτής της ιδιότητας. Αν η f είναι σταθερή και ίση με 1 στο χωρίο D, τότε το στερεό που βρίσκεται ανάμεσα στο D και στο γράφημα της f είναι ένα κατακόρυφο “κυλινδρικό” στερεό με βάση το χωρίο D και ύψος ίσο με 1 και άρα ο όγκος αυτού του στερεού είναι ίσος με το εμβαδόν του D. Επομένως, έχουμε την ισότητα

$$\boxed{\iint_D dxdy = A(D),} \tag{9}$$

όπου με $A(D)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του D. Φυσικά, αν η f είναι σταθερή και ίση με λ στο χωρίο D, τότε, εφαρμόζοντας μια από τις ιδιότητες που είδαμε προηγουμένως μαζί με την (9), βρίσκουμε ότι

$$\iint_D \lambda\, dxdy = \lambda A(D). \tag{10}$$



Κατόπιν έχουμε μερικά απλά πορίσματα των (6) και (10).

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D και ισχύει $f(x,y) \le M$ για κάθε $(x,y) \in D$, τότε

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy \le M\, A(D).$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D και ισχύει $f(x,y) \ge m$ για κάθε $(x,y) \in D$, τότε

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy \ge m\, A(D).$$

Γνωρίζουμε ότι, *αν το χωρίο D είναι κλειστό (δηλαδή περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του) και φραγμένο και αν η f είναι συνεχής στο D, τότε η f έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο D.* Επομένως, αν στα προηγούμενα χρησιμοποιήσουμε ως M, m την μέγιστη τιμή $\max_D(f)$ και την ελάχιστη τιμή $\min_D(f)$ της f στο D, έχουμε το εξής:

Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο χωρίο D, τότε

$$\min_D(f)\, A(D) \le \iint_D f(x,y)\,dxdy \le \max_D(f)\, A(D). \tag{11}$$

Παράδειγμα. Θα εκτιμήσουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{1}{x+y+4}\,dxdy$, όπου D είναι ο μοναδιαίος δίσκος $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\}$. Με τις μεθόδους του Απειροστικού Λογισμού ΙΙ (κριτήριο πρώτης παραγώγου για το εσωτερικό του D και εύρεση ακροτάτων υπό συνθήκη για το σύνορο του D) υπολογίζουμε την ελάχιστη τιμή $4-\sqrt{2}$ και την μέγιστη τιμή $4+\sqrt{2}$ της $x+y+4$ στο D. Επομένως ισχύει

$$0 < 4-\sqrt{2} \le x+y+4 \le 4+\sqrt{2} \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in D.$$

Συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{1}{4+\sqrt{2}} \le \frac{1}{x+y+4} \le \frac{1}{4-\sqrt{2}}$ για κάθε $(x,y) \in D$, και επειδή το εμβαδόν του D είναι ίσο με π, βρίσκουμε ότι

$$\frac{\pi}{4+\sqrt{2}} \le \iint_D \frac{1}{x+y+4}\,dxdy \le \frac{\pi}{4-\sqrt{2}}.$$

Δηλαδή η αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος είναι ανάμεσα στους αριθμούς 0.58 και 1.215.

Κατόπιν θα ασχοληθούμε με τον *τύπο αλλαγής μεταβλητής*. Θυμόμαστε ότι για ολοκληρώματα μίας μεταβλητής ο ανάλογος τύπος έχει την μορφή

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))x'(u)\,du = \int_c^d f(x(u))\frac{dx}{du}\,du,$$

όπου $x = x(u)$ είναι συνάρτηση *με συνεχή παράγωγο* από το διάστημα $[c,d]$ στο διάστημα $[a,b]$. Η συνάρτηση $x = x(u)$ είναι η *συνάρτηση αλλαγής μεταβλητής*: από την μεταβλητή x που διατρέχει το $[a,b]$ στην μεταβλητή u που διατρέχει το $[c,d]$. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $x = x(u)$ είναι γνησίως αύξουσα και άρα $a = x(c)$ και $b = x(d)$ και επίσης ισχύει $x'(u) = \frac{dx}{du} \ge 0$ στο $[c,d]$. Αν η συνάρτηση $x = x(u)$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $a = x(d)$ και $b = x(c)$ και ισχύει $x'(u) = \frac{dx}{du} \le 0$ στο $[c,d]$, ο δε τύπος αλλαγής μεταβλητής έχει την μορφή

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_d^c f(x(u))x'(u)\,du = \int_d^c f(x(u))\frac{dx}{du}\,du.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση τα άκρα c,d δεν εμφανίζονται με την κανονική τους διάταξη (πρώτα το c και μετά το d) ως άκρα των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων και, αν θέλουμε στα ολοκληρώματα να είναι κάτω το c και πάνω το d, πρέπει να αλλάξουμε το πρόσημο μπροστά από τα ολοκληρώματα. Αυτό το κάνουμε αλλάζοντας το πρόσημο της $x'(u) = \frac{dx}{du}$ και, επειδή αυτή είναι μη-θετική, μπορούμε ισοδύναμα να την θέσουμε μέσα σε απόλυτη τιμή: $-\frac{dx}{du} = \left|\frac{dx}{du}\right|$. Άρα ο τελευταίος τύπος αλλαγής μεταβλητής γράφεται ισοδύναμα

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))|x'(u)|\,du = \int_c^d f(x(u))\left|\frac{dx}{du}\right|du. \tag{12}$$

Παρατηρούμε ότι ο ίδιος τύπος ισχύει και στην πρώτη περίπτωση που η $x = x(u)$ είναι γνησίως αύξουσα, αφού τότε ισχύει $\frac{dx}{du} \ge 0$ και άρα $\frac{dx}{du} = \left|\frac{dx}{du}\right|$. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τον τελευταίο τύπο ως έναν ενιαίο τύπο αλλαγής μεταβλητής και στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή που η $x = x(u)$ είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα, και όπου στον τύπο αυτόν οι αριθμοί a,b και οι c,d εμφανίζονται με τη "σωστή" διάταξή τους ως άκρα ολοκλήρωσης.

Ας δούμε τώρα ποιός είναι ο ανάλογος τύπος στην περίπτωση του χώρου διάστασης ίσης με 2. Θεωρούμε ένα χωρίο E στο uv-επίπεδο και ένα χωρίο D στο xy-επίπεδο και μια απεικόνιση

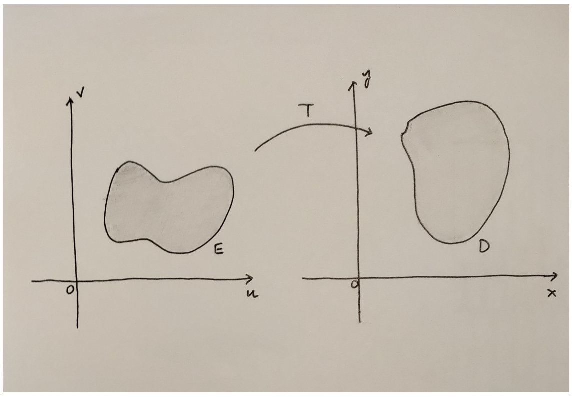
$$T : E \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} D.$$

Αν γράψουμε (u,v) το ανεξάρτητο μεταβλητό σημείο στο χωρίο E και (x,y) το εξαρτημένο μεταβλητό σημείο στο χωρίο D, τότε

$$T(u,v) = (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$$

όπου οι μεταβλητές x,y είναι συναρτήσεις των μεταβλητών u,v:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v).$$



Το **θεώρημα αλλαγής μεταβλητής** είναι το εξής:

Αν η απεικόνιση $T : E \to D$ είναι ένα-προς-ένα από το χωρίο E επί του χωρίου D και αν οι συναρτήσεις $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς u, v στο χωρίο E, τότε

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv, \tag{13}$$

όπου με $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ συμβολίζουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα των x, y ως συναρτήσεις των u, v, δηλαδή:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε την ομοιότητα ανάμεσα στους τύπους (12) και (13).

Παράδειγμα. Θεωρούμε το τρίγωνο E με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(1, 1)$ και την απεικόνιση $T : E \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$(x, y) = T(u, v) = (u, v^2), \qquad \text{δηλαδή} \quad x = x(u, v) = u, \ \ y = y(u, v) = v^2.$$

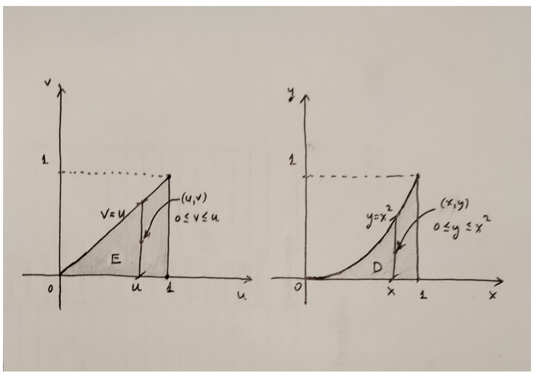
Το E βρίσκεται στο uv-επίπεδο και περιγράφεται ως εξής:

$$E = \{(u, v) \,|\, 0 \le u \le 1, 0 \le v \le u\}.$$

Αν το u διατρέχει το διάστημα $[0, 1]$, τότε το $x = u$ διατρέχει κι αυτό το διάστημα $[0, 1]$. Για σταθερό u και άρα για σταθερό $x = u$, αν το v διατρέχει το διάστημα $[0, u]$, τότε το $y = v^2$ διατρέχει το διάστημα $[0, u^2] = [0, x^2]$. Άρα η T απεικονίζει το χωρίο E στο uv-επίπεδο στο χωρίο D στο xy-επίπεδο το οποίο περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}.$$

Το D είναι το φραγμένο χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στον x-άξονα, στην ευθεία με εξίσωση $x = 1$ και στην παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ και είναι εύκολο να δούμε ότι η T είναι ένα-προς-ένα στο E και άρα $T : E \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} D$.



Η Ιακωβιανή ορίζουσα των συναρτήσεων $x = x(u, v) = u$ και $y = y(u, v) = v^2$ είναι ίση με

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix} = 2v.$$

Άρα από τον τύπο (13) έχουμε

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v))|2v|\, dudv = \iint_E f(u, v^2)2v\, dudv.$$

Επειδή το E είναι χωρίο πρώτου τύπου, το ολοκλήρωμα στο E υπολογίζεται βάσει των τύπων του Fubini και έχουμε:

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = 2 \iint_E f(u, v^2)v\, dudv = 2 \int_0^1 \Big(\int_0^u f(u, v^2)v\, dv\Big)\, du.$$

Τα υπόλοιπα είναι θέμα πράξεων και εξαρτώνται από τον τύπο της f.

Ένα πολύ γενικό και χρήσιμο παράδειγμα μιας ολόκληρης συλλογής συναρτήσεων $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι οι λεγόμενες **γραμμικές συναρτήσεις**. Μια γραμμική συνάρτηση έχει τύπο

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T\Big(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

όπου τα ζευγάρια (x, y) και (u, v) τα γράφουμε στη μορφή πίνακα-στήλης. Οι τύποι των x, y ως συναρτήσεις των u, v είναι

$$x = x(u, v) = au + bv, \quad y = y(u, v) = cu + dv.$$

Γνωρίζουμε ότι η γραμμική συνάρτηση T είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$ και στα παρακάτω θα περιοριστούμε σ' αυτήν την περίπτωση.

Είναι γνωστό από την Γραμμική Άλγεβρα ότι μια γραμμική συνάρτηση T απεικονίζει ευθείες, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα στο uv-επίπεδο σε ευθείες, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα, αντιστοίχως, στο xy-επίπεδο. Επίσης, απεικονίζει ζεύγη παράλληλων ευθειών στο uv-επίπεδο σε ζεύγη παράλληλων ευθειών στο xy-επίπεδο. Μάλιστα, η T διατηρεί την διάταξη παράλληλων ευθειών: αν έχουμε τρεις παράλληλες ευθείες l_1, l_2, l_3 στο uv-επίπεδο και η l_2 βρίσκεται ανάμεσα στις l_1, l_3, τότε οι εικόνες τους $T(l_1), T(l_2), T(l_3)$ στο xy-επίπεδο είναι παράλληλες ευθείες και η $T(l_2)$ βρίσκεται ανάμεσα στις $T(l_1), T(l_3)$.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα παραλληλόγραμμο ή τρίγωνο E στο uv-επίπεδο και την εικόνα D του E μέσω της T στο xy-επίπεδο: $D = T(E)$. Τότε το D είναι ένα παραλληλόγραμμο ή τρίγωνο, αντιστοίχως, και οι κορυφές του E απεικονίζονται στις κορυφές του D και οι πλευρές του E απεικονίζονται στις πλευρές του D. Η Ιακωβιανή ορίζουσα των συναρτήσεων $x = x(u, v) = au + bv$ και $y = y(u, v) = cu + dv$ είναι ίση με

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc,$$

δηλαδή είναι ίση με την ορίζουσα του 2×2 πίνακα της γραμμικής συνάρτησης. Άρα ο τύπος αλλαγής μεταβλητής (13) γράφεται

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dxdy = |ad - bc| \iint_E f(au + bv, cu + dv)\, dudv.} \tag{14}$$

Ο τύπος αυτός είναι χρήσιμος ιδιαίτερα στην περίπτωση που το E είναι ένα ορθογώνιο στο uv-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες ή ένα τρίγωνο στο uv-επίπεδο με δύο πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο D στο xy-επίπεδο που βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες με εξισώσεις $y = 2x - 1$, $y = 2x + 3$ και στις παράλληλες ευθείες με εξισώσεις $y = -x - 2$, $y = -x + 4$, και θέλουμε να υπολογίσουμε το $\iint_D x^2 y\, dxdy$. Ορίζουμε νέες μεταβλητές με τύπους

$$u = 2x - y, \quad v = x + y.$$

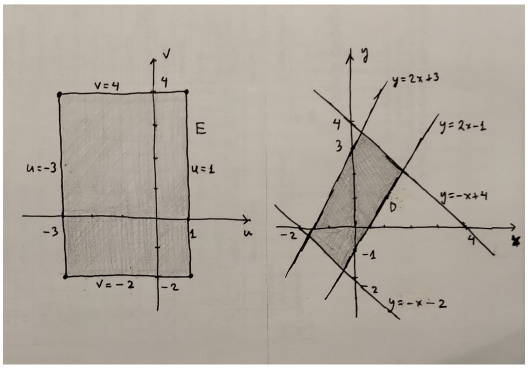
Αν λύσουμε ως προς x, y συναρτήσει των u, v, έχουμε

$$x = \tfrac{1}{3}u + \tfrac{1}{3}v, \quad y = -\tfrac{1}{3}u + \tfrac{2}{3}v.$$

Έτσι ορίζεται η γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T\Big(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v \\ -\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση $y = 2x - 1$ είναι ισοδύναμη με την $u = 1$. Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία στο uv-επίπεδο με εξίσωση $u = 1$ απεικονίζεται μέσω της T στην ευθεία στο xy-επίπεδο με εξίσωση $y = 2x - 1$. Ομοίως, οι ευθείες στο uv-επίπεδο με εξισώσεις $u = -3$, $v = -2$, $v = 4$ απεικονίζονται μέσω της T στις ευθείες στο xy-επίπεδο με εξισώσεις $y = 2x + 3$, $y = -x - 2$, $y = -x + 4$, αντιστοίχως. Επομένως, το παραλληλόγραμμο E στο uv-επίπεδο που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις $u = 1$, $u = -3$, $v = -2$, $v = 4$ απεικονίζεται στο αρχικό παραλληλόγραμμο D στο xy-επίπεδο.



Τώρα, ο τύπος (14) στην συγκεκριμένη περίπτωση γράφεται

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y\, dxdy &= \Big|\big(\tfrac{1}{3}\big)\big(\tfrac{2}{3}\big) - \big(\tfrac{1}{3}\big)\big(-\tfrac{1}{3}\big)\Big| \iint_E \big(\tfrac{u+v}{3}\big)^2 \big(\tfrac{-u+2v}{3}\big)\, dudv \\ &= \tfrac{1}{81} \iint_E (u + v)^2(-u + 2v)\, dudv. \end{aligned}$$

Επειδή, όμως, το E είναι ορθογώνιο στο uv-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα με τους τύπους του Fubini και βρίσκουμε

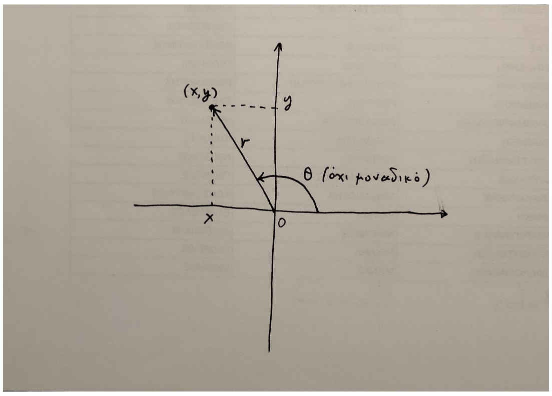
$$\iint_D x^2 y\, dxdy = \tfrac{1}{81} \int_{-3}^{1} \Big(\int_{-2}^{4} (u + v)^2(-u + 2v)\, dv \Big)\, du.$$

Τα υπόλοιπα είναι ζήτημα απλών πράξεων.

Ένα ακόμη εξαιρετικά σημαντικό παράδειγμα είναι η λεγόμενη **αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες**. Στο xy-επίπεδο γράφουμε

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

και αυτό σημαίνει ότι για το σημείο (x, y) η *πολική ακτίνα* r είναι ίση με την απόστασή του από το $(0, 0)$ και η *πολική γωνία* θ είναι ίση με την γωνία που σχηματίζει με τον θετικό x-ημιάξονα η ημιευθεία με κορυφή το $(0, 0)$ που διέρχεται από το (x, y). Το θ λογίζεται θετικό αν το μετράμε με την λεγόμενη *θετική φορά περιστροφής* γύρω από το $(0, 0)$, δηλαδή την φορά περιστροφής που είναι αντίθετη στην φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Το θ λογίζεται αρνητικό αν το μετράμε με την *αρνητική φορά περιστροφής* γύρω από το $(0,0)$, δηλαδή την φορά περιστροφής που είναι ίδια με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Στο ίδιο σημείο $(x,y) \neq (0,0)$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό $r > 0$ και άπειρα θ τα οποία ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π (ακέραιος αριθμός πλήρων περιστροφών). Για να περιορίσουμε την απειρία των θ διαλέγουμε ένα διάστημα μήκους 2π της μορφής $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ ή $(\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ και επιλέγουμε το (αναγκαστικά μοναδικό) θ μέσα από αυτό το διάστημα. Δύο τέτοια συνηθισμένα διαστήματα είναι το $[0, 2\pi)$ και το $(-\pi, \pi]$. Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το διάστημα $[0, 2\pi)$ ενώ αν παρίσταται ανάγκη μπορούμε να χρησιμοποιούμε και το $(-\pi, \pi]$ (ή οποιοδήποτε άλλο διάστημα μήκους 2π).



Θεωρούμε την συνάρτηση

$$T : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

με τύπο

$$(x,y) = T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

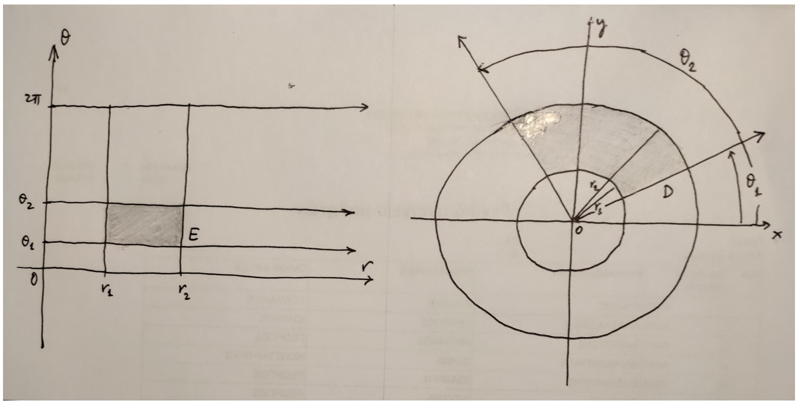
Η συνάρτηση T απεικονίζει την ημιευθεία στο $r\theta$-επίπεδο που διατρέχει οριζοντίως την μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ σε ύψος θ_0 στην ημιευθεία στο xy-επίπεδο με κορυφή το $(0,0)$ η οποία σχηματίζει γωνία θ_0 με τον θετικό x-ημιάξονα. Όταν η αρχική ημιευθεία στο $r\theta$-επίπεδο ανεβαίνει από το ύψος $\theta_0 = 0$ προς το ύψος $\theta_0 = 2\pi$, η αντίστοιχη ημιευθεία στο xy-επίπεδο περιστρέφεται με την θετική φορά περιστροφής γύρω από την κορυφή της, το $(0,0)$, κάνοντας μια πλήρη θετική περιστροφή από τον θετικό x-ημιάξονα προς τον θετικό x-ημιάξονα.

Επίσης η συνάρτηση T απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα στο $r\theta$-επίπεδο που διατρέχει κατακόρυφα την μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ από το σημείο $(r_0, 0)$ μέχρι το σημείο $(r_0, 2\pi)$ στον κύκλο στο xy-επίπεδο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα r_0. Όταν το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα στο $r\theta$-επίπεδο μεταφέρεται προς τα δεξιά καθώς το r_0 αυξάνεται στο $(0, +\infty)$, ο αντίστοιχος κύκλος στο xy-επίπεδο με σταθερό κέντρο $(0,0)$ μεγαλώνει και η ακτίνα του αυξάνεται στο $(0, +\infty)$.

Άρα η T απεικονίζει οριζόντιες μισές ζώνες που βρίσκονται μέσα στην μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ σε γωνίες στο xy-επίπεδο με κορυφή το $(0,0)$. Και η T απεικονίζει ορθογώνια που εκτείνονται κατακόρυφα μέσα στην μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ από ύψος 0 μέχρι ύψος 2π σε δακτύλιους στο xy-επίπεδο. Θεωρώντας τομές οριζόντιων μισών ζωνών και κατακόρυφων ορθογωνίων μέσα στην μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ έχουμε ότι

$$T : E \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} D, \tag{15}$$

όπου $E = \{(r,\theta) \,|\, r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ είναι ένα ορθογώνιο στην μισή ζώνη $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ και D είναι το "κυκλικό ορθογώνιο" στο xy-επίπεδο που βρίσκεται ανάμεσα στους κύκλους με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνες r_1 και r_2 και στις ημιευθείες με κορυφή $(0,0)$ που σχηματίζουν αντίστοιχες γωνίες θ_1 και θ_2 με τον θετικό x-ημιάξονα.



Η Ιακωβιανή ορίζουσα της συνάρτησης T είναι ίση με

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Άρα ο τύπος αλλαγής μεταβλητής (13) γράφεται

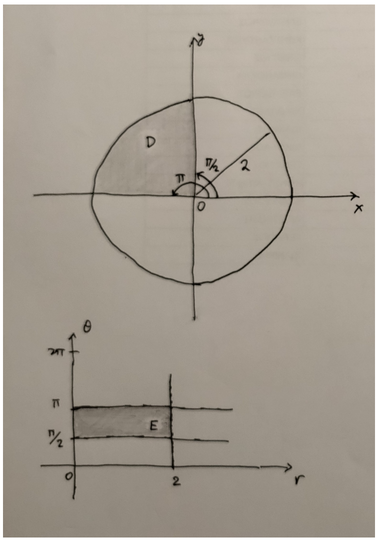
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta,} \tag{16}$$

όταν E και D είναι τα χωρία που εμφανίζονται στην (15).

Στον τύπο (16) η εμφανιζόμενη σχέση

$$dxdy = r\,drd\theta$$

προκύπτει, όπως είδαμε, από τον υπολογισμό της Ιακωβιανής ορίζουσας της συνάρτησης T που μετατρέπει πολικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές συντεταγμένες και θα θυμόμαστε αυτήν την σχέση χωρίς να κάνουμε κάθε φορά τον ίδιο υπολογισμό.



Παράδειγμα. Θεωρούμε το χωρίο D στο xy-επίπεδο το οποίο είναι η τομή του δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 2 και του δεύτερου τεταρτημορίου του xy-επιπέδου και θέλουμε να υπολογίσουμε το $\iint_D xy\,dxdy$. Βλέπουμε ότι τα σημεία του D περιγράφονται ως τα σημεία που έχουν πολική ακτίνα r η οποία κυμαίνεται στο διάστημα $[0,2]$ και πολική γωνία θ η οποία κυμαίνεται στο διάστημα $[\frac{\pi}{2},\pi]$. Άρα

$$\iint_D xy\,dxdy = \iint_E r^2\cos\theta\sin\theta\,r\,drd\theta,$$

όπου $E = \{(r,\theta) \,\big|\, 0 \le r \le 2, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\}$. Επομένως, από τους τύπους του Fubini έχουμε

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^2 \Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta \Big)\, dr = \int_0^2 r^3\, dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

και συνεχίζουμε κάνοντας πράξεις.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το χωρίο D στο xy-επίπεδο το οποίο είναι η τομή του δακτύλιου κέντρου $(0,0)$, εσωτερικής ακτίνας 1 και εξωτερικής ακτίνας 3 και της *μη-κυρτής* γωνίας που ορίζεται από τις ημιευθείες με κορυφή το $(0,0)$ που σχηματίζουν γωνίες $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{3\pi}{2}$ με τον θετικό x-ημιάξονα και θέλουμε να υπολογίσουμε το $\iint_D (x+y)\,dxdy$. Τα σημεία του D περιγράφονται ως τα σημεία που έχουν πολική ακτίνα r η οποία κυμαίνεται στο διάστημα $[1,3]$ και πολική γωνία θ η οποία κυμαίνεται στο διάστημα $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$. Άρα

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \iint_E (r\cos\theta + r\sin\theta)\, r\, drd\theta,$$

όπου $E = \{(r,\theta) \,\big|\, 1 \le r \le 3, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}\}$. Επομένως,

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_1^3 \Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} r^2(\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta \Big)\, dr = \int_1^3 r^2\, dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta$$

και συνεχίζουμε κάνοντας πράξεις.