Ολοκληρωτικός Λογισμός πολλών μεταβλητών

Πρόχειρες σημειώσεις

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

3η εβδομάδα.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$$

στον τριδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ και μια πραγματική συνάρτηση

$$f : R \to \mathbb{R}$$

ορισμένη στο R και θα ορίσουμε το **τριπλό ολοκλήρωμα** της f στο R, με τρόπο ανάλογο του τρόπου ορισμού του διπλού ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης ορισμένης σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του $\mathbb{R}^2$, παίρνοντας, δηλαδή, αθροίσματα Riemann και το όριό τους. Θα θεωρήσουμε διαμερίσεις του παραλληλεπιπέδου R σε μικρότερα παραλληλεπίπεδα, μέσω αυτών των διαμερίσεων θα θεωρήσουμε τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann της f και μέσω αυτών των αθροισμάτων Riemann, περνώντας στο όριο, θα προκύψει το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο R.

Ξεκινάμε με μια διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$ στον x-άξονα, με μια διαμέριση του διαστήματος $[c, d]$ στον y-άξονα,

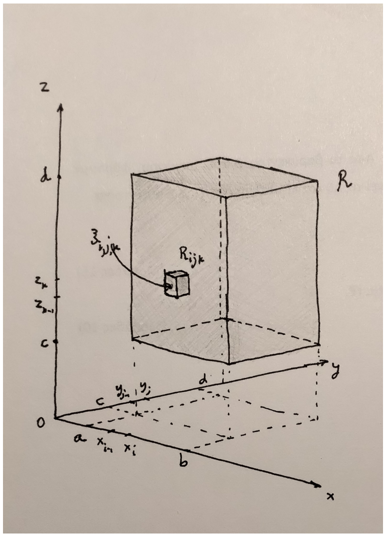
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d,$$

καθώς και με μια διαμέριση του διαστήματος $[r, s]$ στον z-άξονα,

$$r = z_0 < z_1 < \ldots < z_{l-1} < z_l = s.$$

Όταν σχεδιάσουμε τα επίπεδα που τέμνουν κάθετα τον x-άξονα στα σημεία της πρώτης διαμέρισης, τα επίπεδα που τέμνουν κάθετα τον y-άξονα στα σημεία της δεύτερης διαμέρισης και τα επίπεδα που τέμνουν κάθετα τον z-άξονα στα σημεία της τρίτης διαμέρισης, σχηματίζεται μια διαμέριση του παραλληλεπιπέδου R σε nml μικρότερα παραλληλεπίπεδα

$$R_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k], \qquad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l.$$



Όσο λεπτότερες είναι οι διαμερίσεις των $[a, b]$, $[c, d]$ και $[r, s]$, δηλαδή όσο μικρότερα είναι τα

$$\max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i, \qquad \max_{1\leq j\leq m} \Delta y_j, \qquad \max_{1\leq k\leq l} \Delta z_k,$$

τόσο λεπτότερη λέμε ότι είναι η διαμέριση του παραλληλεπιπέδου R στα ορθογώνια $R_{i,j,k}$.

Κατόπιν, δεδομένης της διαμέρισης που θεωρήσαμε παραπάνω, θεωρούμε μέσα σε κάθε ορθογώνιο $R_{i,j,k}$ ένα τυχαίο σημείο $\xi_{i,j,k}$ και σχηματίζουμε το τριπλό άθροισμα

$$\textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} f(\xi_{i,j,k})\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} f(\xi_{i,j,k})\, V(R_{i,j,k}), \tag{1}$$

όπου $V(R_{i,j,k}) = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου $R_{i,j,k}$. Το άθροισμα αυτό ονομάζεται **άθροισμα Riemann** της f που ορίζεται από την συγκεκριμένη διαμέριση του παραλληλεπιπέδου R σε υποπαραλληλεπίπεδα $R_{i,j,k}$ και από την συγκεκριμένη επιλογή "ενδιάμεσων" σημείων $\xi_{i,j,k}$ στα $R_{i,j,k}$.

Και τώρα έχουμε τον εξής βασικό ορισμό.

Υποθέτουμε ότι όσο λεπτότερη είναι η διαμέριση του R στα υποπαραλληλεπίπεδα $R_{i,j,k}$ τόσο πιο κοντά έρχεται το άθροισμα Riemann σε κάποιον συγκεκριμένο αριθμό. Αν συμβαίνει αυτό, τότε λέμε ότι η f είναι ***(Riemann) ολοκληρώσιμη*** *στο R και ο αριθμός τον οποίο πλησιάζει το άθροισμα Riemann ονομάζεται* ***ολοκλήρωμα (Riemann)*** *της f στο R και συμβολίζεται*

$$\textstyle\iiint_R f(x, y, z)\, dxdydz \qquad \text{ή} \qquad \iiint_R f.$$

Αν, λοιπόν, η f είναι ολοκληρώσιμη στο παραλληλεπίπεδο R, τότε έχουμε

$$\textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} f(\xi_{i,j,k})\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \approx \iiint_R f(x, y, z)\, dxdydz$$

όταν $\max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i \approx 0$, $\max_{1\leq j\leq m} \Delta y_j \approx 0$, $\max_{1\leq k\leq l} \Delta z_k \approx 0$. Ή, με άλλα λόγια,

$$\textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} f(\xi_{i,j,k})\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \to \iiint_R f(x, y, z)\, dxdydz$$

όταν $\max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i \to 0$, $\max_{1\leq j\leq m} \Delta y_j \to 0$, $\max_{1\leq k\leq l} \Delta z_k \to 0$.

Για να μιλήσουμε για το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας του τριπλού ολοκληρώματος πρέπει πρώτα να μιλήσουμε για την έννοια του "τετραδιάστατου όγκου τετραδιάστατου στερεού". Η πιο απλή περίπτωση για να ξεκινήσουμε είναι η περίπτωση ενός τετραδιάστατου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου

$$K = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] \times [u, v].$$

Φυσικά δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε το K, διότι αυτό βρίσκεται στον χώρο $\mathbb{R}^4$. Μπορούμε, όμως, κατ' αναλογία με τον τριδιάστατο όγκο τριδιάστατου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (και με το διδιάστατο εμβαδόν διδιάστατου ορθογωνίου παραλληλογράμμου) να ορίσουμε τον τετραδιάστατο όγκο του K ως το γινόμενο των μηκών των ακμών του:

$$\Omega(K) = (b - a)(d - c)(s - r)(v - u).$$

Βλέπουμε αμέσως ότι, βάσει αυτού του ορισμού, ισχύει ο κανόνας:

$$\Omega(K) = V(R)\, h,$$

όπου $R = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ είναι η βάση του K στον $\mathbb{R}^3$ και $V(R) = (b - a)(d - c)(s - r)$ είναι ο τριδιάστατος όγκος της τριδιάστατης βάσης, και όπου $h = v - u$ είναι το ύψος του K μετρημένο στον τέταρτο άξονα του $\mathbb{R}^4$. Γενικότερα, αν ένα τετραδιάστατο στερεό M είναι η ένωση ξένων ανά δύο τέτοιων τετραδιάστατων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων K, τότε ορίζουμε τον τετραδιάστατο όγκο του M να είναι το άθροισμα των τετραδιάστατων όγκων των επιμέρους K. Ακόμη γενικότερα, αν ένα τετραδιάστατο στερεό L μπορεί να προσεγγισθεί από τέτοιου τύπου τετραδιάστατα στερεά

M, τότε ορίζουμε τον τετραδιάστατο όγκο του L να είναι το όριο των τετραδιάστατων όγκων των M που προσεγγίζουν το L.

Βάσει αυτής της συζήτησης, ας δούμε τώρα το γεωμετρικό περιεχόμενο του τριπλού ολοκληρώματος.

Αν η f είναι μη-αρνητική στο R, δηλαδή αν ισχύει $f(x, y, z) \geq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in R$, τότε ο όρος $f(\xi_{i,j,k})\,\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = V(R_{i,j,k}) f(\xi_{i,j,k})$ του αθροίσματος Riemann (1) ισούται με τον τετραδιάστατο όγκο του τετραδιάστατου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου το οποίο έχει βάση το τριδιάστατο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $R_{i,j,k}$ στον xyz-χώρο και ύψος $f(\xi_{i,j,k})$, δηλαδή του τετραδιάστατου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου το οποίο εκτείνεται κατακόρυφα πάνω από τον xyz-χώρο από το παραλληλεπίπεδο $R_{i,j,k}$ μέχρι το σημείο $(\xi_{i,j,k}, f(\xi_{i,j,k}))$ του γραφήματος της f. Το γράφημα της f είναι μια τριδιάστατη επιφάνεια μέσα στον τετραδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^4$ και πάνω από το τριδιάστατο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R (το οποίο βρίσκεται στον τριδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$). Άρα, σ' αυτήν την περίπτωση, το άθροισμα Riemann (1) ισούται με τον τετραδιάστατο όγκο της ένωσης όλων αυτών των τετραδιάστατων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων. Όταν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο R και η διαμέριση είναι πολύ λεπτή τότε, αφ' ενός το άθροισμα Riemann προσεγγίζει (εξ ορισμού) το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο R αφ' ετέρου η ένωση των τετραδιάστατων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων προσεγγίζει το τετραδιάστατο στερεό που βρίσκεται πάνω από το τριδιάστατο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R και κάτω από την τριδιάστατη επιφάνεια/γράφημα της f, και επομένως ο τετραδιάστατος όγκος της ένωσης των τετραδιάστατων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων προσεγγίζει τον τετραδιάστατο όγκο του τετραδιάστατου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο R και στο γράφημα της f. Επειδή, λοιπόν, τα δύο όρια του αθροίσματος Riemann πρέπει να είναι ίσα, συμπεραίνουμε ότι:

Αν η f είναι μη-αρνητική και ολοκληρώσιμη στο R, τότε το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο R ισούται με τον τετραδιάστατο όγκο του τετραδιάστατου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο R και στο γράφημα της f.

Το τριπλό ολοκλήρωμα συνάρτησης σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ιδιότητες εντελώς ανάλογες με τις ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος συνάρτησης σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οι τύποι που εκφράζουν αυτές τις ιδιότητες είναι οι ίδιοι με τους τύπους (2), (5), (8) και (9) στις σημειώσεις της πρώτης εβδομάδας όταν αντικαταστήσουμε το σύμβολο $\iint_R$ με το σύμβολο $\iiint_R$, τα $f(x, y), g(x, y)$ με τα $f(x, y, z), g(x, y, z)$ και το $dxdy$ με το $dxdydz$. Θα τις καταγράψουμε λίγο αργότερα, μια και καλή, ως ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος σε γενικότερο τριδιάστατο χωρίο D.

Το σύμβολο $\iiint_R f(x, y, z)\, dxdydz$ έχει νόημα μόνο όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο παραλληλεπίπεδο R. Ένα θεώρημα που μας εξασφαλίζει την ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης είναι το εξής:

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R ή, πιο γενικά, αν η f είναι συνεχής στο R εκτός από κάποια σημεία ασυνέχειας τα οποία βρίσκονται όλα πάνω σε κάποιες πεπερασμένου πλήθους επιφάνειες μέσα στο R οι οποίες είναι γραφήματα συνεχών συναρτήσεων $z = \phi(x, y)$ ή $y = \psi(x, z)$ ή $x = \chi(y, z)$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.

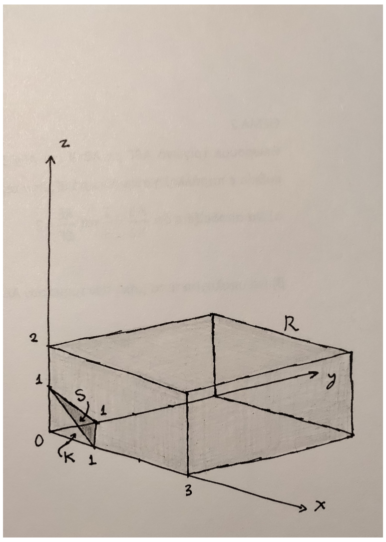
Παράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 y + xe^{xz}$ είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^3$ και άρα είναι ολοκληρώσιμη σε οποιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση f που ορίζεται στο παραλληλεπίπεδο $R = [0, 3] \times [0, 4] \times [0, 2]$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \begin{cases} xyz^3, & (x, y, z) \in R, x + y + z \geq 1 \\ xy^2 + yz, & (x, y, z) \in R, x + y + z < 1 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο R εκτός από τα σημεία του R που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο με εξίσωση $x + y + z = 1$. Αυτά τα σημεία ασυνέχειας της f βρίσκονται όλα πάνω σε ένα τρίγωνο S στον xyz-χώρο το οποίο είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $z = \phi(x, y) = 1 - x - y$ για τα (x, y)

που ανήκουν στο τρίγωνο στο xy-επίπεδο $K = \{(x,y) \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ (αλλά συγχρόνως και γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \psi(x,z) = 1 - x - z$, καθώς και γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = \chi(y,z) = 1 - y - z$). Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.



Για τον υπολογισμό τριπλών ολοκληρωμάτων, όπως και για τα διπλά ολοκληρώματα, σπάνια βασιζόμαστε στον ορισμό του ολοκληρώματος (ως όριο αθροισμάτων Riemann). Συνήθως εφαρμόζουμε το ακόλουθο **Θεώρημα του Fubini** το οποίο έχει έξι μορφές. Η πρώτη μορφή:

Θεώρημα του Fubini. *Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $R = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ και για κάθε $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ η $f(x,y,z)$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του z) στο διάστημα $[r,s]$ και για κάθε $x \in [a,b]$ η $\int_r^s f(x,y,z)\,dz$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του y) στο διάστημα $[c,d]$ και η $\int_c^d (\int_r^s f(x,y,z)\,dz)\,dy$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του x) στο διάστημα $[a,b]$, τότε*

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \Big(\int_c^d \Big(\int_r^s f(x,y,z)\,dz \Big)\,dy \Big)\,dx.$$

Η δεύτερη μορφή:

Θεώρημα του Fubini. *Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $R = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ και για κάθε $(x,z) \in [a,b] \times [r,s]$ η $f(x,y,z)$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του y) στο διάστημα $[c,d]$ και για κάθε $x \in [a,b]$ η $\int_c^d f(x,y,z)\,dy$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του z) στο διάστημα $[r,s]$ και η $\int_r^s (\int_c^d f(x,y,z)\,dy)\,dz$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του x) στο διάστημα $[a,b]$, τότε*

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \Big(\int_r^s \Big(\int_c^d f(x,y,z)\,dy \Big)\,dz \Big)\,dx.$$

Υπάρχουν άλλες τέσσερις μορφές, τις οποίες καταγράφουμε χωρίς τις διατυπώσεις των προϋποθέσεων (διατυπώστε τις εσείς):

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \Big(\int_a^b \Big(\int_r^s f(x,y,z)\,dz \Big)\,dx \Big)\,dy.$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \Big(\int_r^s \Big(\int_a^b f(x,y,z)\,dx \Big)\,dz \Big)\,dy.$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_r^s \Big(\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y,z)\,dy \Big)\,dx \Big)\,dz.$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_r^s \Big(\int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y,z)\,dx \Big)\,dy \Big)\,dz.$$

Έτσι ο υπολογισμός τριπλού ολοκληρώματος ανάγεται με έξι διαφορετικούς τρόπους στον υπολογισμό διαδοχικά τριών απλών ολοκληρωμάτων μίας μεταβλητής. Παρατηρήστε ότι όταν βρισκόμαστε στον $\mathbb{R}^2$ έχουμε ακριβώς δύο μεταθέσεις των x, y, τις xy και yx (γι αυτό το ανάλογο Θεώρημα του Fubini έχει δύο μορφές), ενώ στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε ακριβώς έξι μεταθέσεις των x, y, z, τις xyz, xzy, yxz, yzx, zxy και zyx.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x, y, z) = xy + z$ είναι συνεχής στο παραλληλεπίπεδο $R = [0, 1] \times [-1, 3] \times [2, 4]$ και άρα ολοκληρώσιμη στο R. Επίσης, για κάθε $(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 3]$ η $f(x, y, z) = xy + z$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του z στο $[2, 4]$ (με σταθερά x, y) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[2, 4]$. Για κάθε $(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 3]$ υπολογίζουμε

$$\int_2^4 (xy + z)\,dz = \left(xyz + \tfrac{z^2}{2}\right)\Big|_2^4 = 2xy + 6.$$

Τώρα, για κάθε $x \in [0, 1]$ η $\int_2^4 (xy + z)\,dz = 2xy + 6$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του y στο $[-1, 3]$ (με σταθερό x) και άρα ολοκληρώσιμη στο $[-1, 3]$. Για κάθε $x \in [0, 1]$ υπολογίζουμε

$$\int_{-1}^3 \Big(\int_2^4 (xy + z)\,dz \Big)\,dy = \int_{-1}^3 (2xy + 6)\,dy = (xy^2 + 6y)\Big|_{-1}^3 = 8x + 24.$$

Τέλος, η $\int_{-1}^3 \Big(\int_2^4 (xy + z)\,dz \Big)\,dy = 8x + 24$ είναι συνεχής ως συνάρτηση του x στο $[0, 1]$ και άρα ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Άρα από τον πρώτο τύπο του Fubini έχουμε

$$\iiint_R (xy + z)\,dxdydz = \int_0^1 \Big(\int_{-1}^3 \Big(\int_2^4 (xy + z)\,dz \Big)\,dy \Big)\,dx = \int_0^1 (8x + 24)\,dx = (4x^2 + 24x)\Big|_0^1 = 28.$$

Πολύ συνοπτικά εφαρμόζουμε έναν οποιονδήποτε άλλον από τους συνολικά έξι τύπους του Fubini:

$$\int_{-1}^3 (xy + z)\,dy = \left(x\tfrac{y^2}{2} + yz\right)\Big|_{-1}^3 = 4x + 4z,$$

$$\int_0^1 \Big(\int_{-1}^3 (xy + z)\,dy \Big)\,dx = \int_0^1 (4x + 4z)\,dx = (2x^2 + 4xz)\Big|_0^1 = 4z + 2,$$

$$\iiint_R (xy + z)\,dxdydz = \int_2^4 \Big(\int_0^1 \Big(\int_{-1}^3 (xy + z)\,dy \Big)\,dx \Big)\,dz = \int_2^4 (4z + 2)\,dz = (2z^2 + 2z)\Big|_2^4 = 28.$$

Όπως αναμενόταν, και με τους δύο τύπους βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα: το τριπλό ολοκλήρωμα πρέπει να έχει μόνο μία τιμή. Όποιον από τους υπόλοιπους τέσσερις τρόπους δοκιμάσουμε θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Τώρα θα δούμε πώς ορίζεται η έννοια του τριπλού ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης σε γενικότερο φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^3$. Η διαδικασία θα είναι εντελώς ανάλογη της διαδικασίας ορισμού της έννοιας του διπλού ολοκληρώματος σε γενικό φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^2$ από την έννοια του διπλού ολοκληρώματος σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Έστω D ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^3$ και πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ ορισμένη στο D. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο R αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει το χωρίο D και ορίζουμε την επέκταση της f η οποία είναι ταυτοτικά ίση με 0 μέσα στο R και έξω από το D, δηλαδή την συνάρτηση $f^* : D \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in D \\ 0, & (x, y, z) \in R \setminus D \end{cases}$$

Θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο D όταν η f^* είναι ολοκληρώσιμη στο R και σ' αυτήν την περίπτωση ορίζουμε το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο D με τον τύπο

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dxdydz := \iiint_R f^*(x, y, z)\,dxdydz.$$

Τώρα θα καταγράψουμε τις βασικές ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος σε γενικό φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^3$. Είναι ανάλογες των ιδιοτήτων του διπλού ολοκληρώματος σε γενικό φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ που είδαμε στις διαλέξεις της δεύτερης εβδομάδας.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο χωρίο D τότε και η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\iiint_D (f(x,y,z)+g(x,y,z))\,dxdydz = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_D g(x,y,z)\,dxdydz.$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D και λ είναι αριθμός, τότε και η λf είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\iiint_D \lambda f(x,y,z)\,dxdydz = \lambda \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο χωρίο D και ισχύει $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ για κάθε $(x,y,z) \in D$, τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz \le \iiint_D g(x,y,z)\,dxdydz.$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο D τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο D και ισχύει

$$\Big|\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz\Big| \le \iiint_D |f(x,y,z)|\,dxdydz.$$

Αν το σύνορο του χωρίου D αποτελείται απο πεπερασμένου πλήθους επιφάνειες οι οποίες είναι γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων $z = \phi(x,y)$ ή $y = \psi(x,z)$ ή $x = \chi(y,z)$ και αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής στο χωρίο D εκτός από κάποια σημεία ασυνέχειας τα οποία όλα βρίσκονται πάνω σε πεπερασμένου πλήθους επιφάνειες μέσα στο D οι οποίες είναι γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων $z = \phi(x,y)$ ή $y = \psi(x,z)$ ή $x = \chi(y,z)$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο D.

Αν τα χωρία $D_1, \ldots, D_k$ ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, και αν το χωρίο D είναι το $D = D_1 \cup \ldots \cup D_k$, και αν η f είναι ολοκληρώσιμη στα χωρία $D, D_1, \ldots, D_k$, τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \cdots + \iiint_{D_k} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Αν η f είναι μη-αρνητική και ολοκληρώσιμη στο χωρίο D, τότε το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο D ισούται με τον τετραδιάστατο όγκο του τετραδιάστατου στερεού που βρίσκεται στον τετραδιάστατο χώρο ανάμεσα στο τριδιάστατο D και στο τριδιάστατο γράφημα της f.

Το τριπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης 1 στο χωρίο D ισούται με τον (τριδιάστατο) όγκο του D:

$$\iiint_D dxdydz = V(D),$$

όπου με $V(D)$ συμβολίζουμε τον όγκο του D. Αν η f είναι σταθερή και ίση με λ στο χωρίο D, τότε, εφαρμόζοντας την τελευταία ισότητα και μια από τις ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος, βρίσκουμε ότι

$$\iiint_D \lambda\,dxdydz = \lambda\,V(D).$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D και ισχύει $f(x,y,z) \le M$ για κάθε $(x,y,z) \in D$, τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz \le M\,V(D).$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο D και ισχύει $f(x,y,z) \ge m$ για κάθε $(x,y,z) \in D$, τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz \ge m\,V(D).$$

Γνωρίζουμε ότι, *αν το χωρίο D είναι κλειστό (δηλαδή περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του) και φραγμένο και αν η f είναι συνεχής στο D, τότε η f έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο D.* Επομένως, αν στα προηγούμενα χρησιμοποιήσουμε ως M, m την μέγιστη τιμή $\max_D(f)$ και την ελάχιστη τιμή $\min_D(f)$ της f στο D, έχουμε το εξής:

Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο χωρίο D, τότε

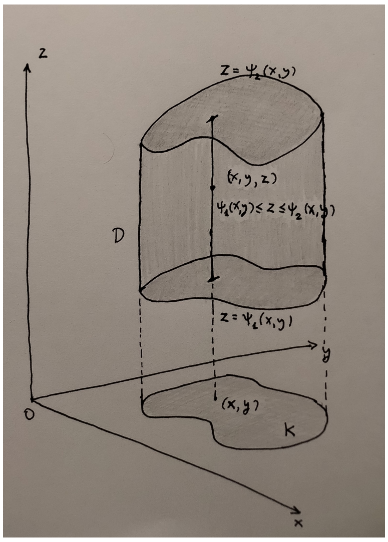
$$\min_D(f)\, V(D) \le \iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz \le \max_D(f)\, V(D).$$

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τριπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία με τους τύπους του Fubini. Οι τύποι που θα αναφέρουμε είναι εντελώς ανάλογοι των τύπων του Fubini για τα διπλά ολοκληρώματα στους αντίστοιχους δύο τύπους χωρίων στον $\mathbb{R}^2$.

Χωρία πρώτου τύπου (στον χώρο). Τα χωρία αυτά περιγράφονται ως εξής:

$$D = \{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in K, \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\},$$

όπου K είναι ένα φραγμένο χωρίο στο xy-επίπεδο και $z = \psi_1(x,y)$, $z = \psi_2(x,y)$ είναι δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο K με την ιδιότητα: $\psi_1(x,y) \le \psi_2(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in K$. Δηλαδή, το σημείο (x,y) διατρέχει το χωρίο K και, για κάθε $(x,y) \in K$, το z διατρέχει το διάστημα $[\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)]$ (το οποίο εξαρτάται από τα x, y).



Το χωρίο πρώτου τύπου D μπορούμε να το περιγράψουμε γεωμετρικά ως εξής. Για κάθε (x,y) θεωρούμε την κατακόρυφη ευθεία η οποία τέμνει κάθετα το xy-επίπεδο στο σημείο (x,y). Όταν το (x,y) είναι έξω από το χωρίο K του xy-επιπέδου, η αντίστοιχη κατακόρυφη ευθεία δεν τέμνει το D. Όμως, όταν το (x,y) είναι στο K, τότε η αντίστοιχη κατακόρυφη ευθεία τέμνει το D σε ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο έχει ως κάτω άκρο το σημείο $(x,y,\psi_1(x,y))$, ως άνω άκρο το σημείο $(x,y,\psi_2(x,y))$ και, επομένως, τα σημεία του είναι ακριβώς όλα τα (x,y,z) με $\psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)$. Όλα μαζί τα κάτω σημεία των κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(x,y,\psi_1(x,y))$ για $(x,y) \in K$, σχηματίζουν την επιφάνεια που αποτελεί την κάτω πλευρά του D. Ενώ όλα μαζί τα πάνω σημεία των κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων που τέμνουν το D, δηλαδή τα $(x,y,\psi_2(x,y))$ για $(x,y) \in K$, σχηματίζουν την επιφάνεια που αποτελεί την πάνω πλευρά του D. Καθώς το (x,y) διατρέχει το K, το αντίστοιχο κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα "σαρώνει" το χωρίο D.

Τώρα, αν υποθέσουμε ότι σ' αυτό το χωρίο D είναι ορισμένη μια πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο D, τότε

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_K \Big(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \Big) dxdy}$$

όταν $D = \{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in K, \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$.

Τώρα μπορούμε να διακρίνουμε δύο (υπο)περιπτώσεις: το χωρίο K στο xy-επίπεδο ενδέχεται να είναι πρώτου ή δεύτερου τύπου. Αν το K είναι πρώτου τύπου στο xy-επίπεδο, δηλαδή K =

$\{(x,y) \mid a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$, τότε ο παραπάνω τύπος γράφεται

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \Big(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \Big) dy \Big) dx}$$

όταν $D = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$.
Ενώ, αν το K είναι δεύτερου τύπου στο xy-επίπεδο, δηλαδή $K = \{(x,y) \mid c \le y \le d, \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\}$, τότε ο παραπάνω τύπος γράφεται

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \Big(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \Big(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \Big) dx \Big) dy}$$

όταν $D = \{(x,y,z) \mid c \le y \le d, \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y), \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$.

Τώρα θα περιγράψουμε, τελείως επιγραμματικά, τους άλλους δύο τύπους χωρίων στον χώρο και τους αντίστοιχους τύπους του Fubini. Όλα προκύπτουν από την περίπτωση των χωρίων πρώτου τύπου με απλή μετάθεση των μεταβλητών x, y, z.

Χωρία δεύτερου τύπου (στον χώρο). Τα χωρία αυτά γράφονται:

$$D = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in K, \psi_1(x,z) \le y \le \psi_2(x,z)\},$$

όπου K είναι ένα φραγμένο χωρίο στο xz-επίπεδο και $y = \psi_1(x,z)$, $y = \psi_2(x,z)$ είναι δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο K με την ιδιότητα: $\psi_1(x,z) \le \psi_2(x,z)$ για κάθε $(x,z) \in K$. Δηλαδή, το σημείο (x,z) διατρέχει το χωρίο K και, για κάθε $(x,z) \in K$, το y διατρέχει το διάστημα $[\psi_1(x,z), \psi_2(x,z)]$ (το οποίο εξαρτάται από τα x, z).

Αν στο χωρίο D είναι ορισμένη μια πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο D, τότε

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_K \Big(\int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \Big) dxdz}$$

όταν $D = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in K, \psi_1(x,z) \le y \le \psi_2(x,z)\}$.

Και έχουμε δύο (υπο)περιπτώσεις: το χωρίο K στο xz-επίπεδο ενδέχεται να είναι πρώτου ή δεύτερου τύπου. Αν το K είναι πρώτου τύπου στο xz-επίπεδο, δηλαδή $K = \{(x,z) \mid a \le x \le b, \phi_1(x) \le z \le \phi_2(x)\}$, τότε ο παραπάνω τύπος γράφεται

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \Big(\int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \Big) dz \Big) dx}$$

όταν $D = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b, \phi_1(x) \le z \le \phi_2(x), \psi_1(x,z) \le y \le \psi_2(x,z)\}$.
Ενώ, αν το K είναι δεύτερου τύπου στο xz-επίπεδο, δηλαδή $K = \{(x,z) \mid r \le z \le s, \phi_1(z) \le x \le \phi_2(z)\}$, τότε ο παραπάνω τύπος γράφεται

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_r^s \Big(\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \Big(\int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \Big) dx \Big) dz}$$

όταν $D = \{(x,y,z) \mid r \le z \le s, \phi_1(z) \le x \le \phi_2(z), \psi_1(x,z) \le y \le \psi_2(x,z)\}$.

Χωρία τρίτου τύπου (στον χώρο). Τα χωρία αυτά γράφονται:

$$D = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in K, \psi_1(y,z) \le x \le \psi_2(y,z)\},$$

όπου K είναι ένα φραγμένο χωρίο στο yz-επίπεδο και $x = \psi_1(y,z)$, $x = \psi_2(y,z)$ είναι δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο K με την ιδιότητα: $\psi_1(y,z) \le \psi_2(y,z)$ για κάθε $(y,z) \in K$. Δηλαδή, το σημείο (y,z) διατρέχει το χωρίο K και, για κάθε $(y,z) \in K$, το x διατρέχει το διάστημα $[\psi_1(y,z), \psi_2(y,z)]$ (το οποίο εξαρτάται από τα y, z).

Αν στο χωρίο D είναι ορισμένη μια πραγματική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο D, τότε

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_K \Big(\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \Big)\,dydz}$$

όταν $D = \{(x,y,z)\,|\,(y,z) \in K, \psi_1(y,z) \le x \le \psi_2(y,z)\}$.

Πάλι έχουμε δύο (υπο)περιπτώσεις: το χωρίο K στο yz-επίπεδο ενδέχεται να είναι πρώτου ή δεύτερου τύπου. Αν το K είναι πρώτου τύπου στο yz-επίπεδο, δηλαδή $K = \{(y,z)\,|\,c \le y \le d, \phi_1(y) \le z \le \phi_2(y)\}$, τότε ο παραπάνω τύπος γράφεται

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \Big(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} \Big(\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \Big) dz \Big) dy}$$

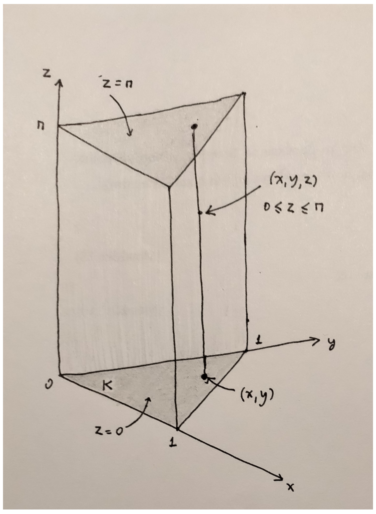
όταν $D = \{(x,y,z)\,|\,c \le y \le d, \phi_1(y) \le z \le \phi_2(y), \psi_1(y,z) \le x \le \psi_2(y,z)\}$.
Ενώ, αν το K είναι δεύτερου τύπου στο yz-επίπεδο, δηλαδή $K = \{(y,z)\,|\,r \le z \le s, \phi_1(z) \le y \le \phi_2(z)\}$, τότε ο παραπάνω τύπος γράφεται

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_r^s \Big(\int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \Big(\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \Big) dy \Big) dz}$$

όταν $D = \{(x,y,z)\,|\,r \le z \le s, \phi_1(z) \le y \le \phi_2(z), \psi_1(y,z) \le x \le \psi_2(y,z)\}$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το φραγμένο χωρίο D στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τα επίπεδα με εξισώσεις $z = 0, z = \pi, x = 0, y = 0$ και $x + y = 1$ και θα υπολογίσουμε το $\iiint_D x^2 y \cos z\,dxdydz$. Από τις τρεις τελευταίες εξισώσεις βλέπουμε ότι το σημείο (x,y) βρίσκεται στο τρίγωνο K του xy-επιπέδου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Επίσης, βλέπουμε ότι το z είναι ανάμεσα στους αριθμούς 0 και π. Άρα το χωρίο D είναι ένα κατακόρυφο κυλινδρικό χωρίο που έχει ως βάση το τρίγωνο K και ως οροφή το παράλληλο προς το K τρίγωνο σε ύψος π. Το D περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in K, 0 \le z \le \pi\}.$$



Άρα το D είναι πρώτου τύπου στον χώρο με $\psi_1(x,y) = 0$, $\psi_2(x,y) = \pi$ για $(x,y) \in K$. Επομένως

$$\iiint_D x^2 y \cos z\,dxdydz = \iint_K \Big(\int_0^\pi x^2 y \cos z\,dz \Big) dxdy. \tag{2}$$

Τώρα, το τρίγωνο K είναι χωρίο πρώτου τύπου στο xy-επίπεδο: $K = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$ με $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = 1 - x$ για $x \in [0,1]$. Επομένως,

$$\iiint_D x^2 y \cos z\,dxdydz = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \Big(\int_0^\pi x^2 y \cos z\,dz \Big) dy \Big) dx.$$

Και τώρα υπολογίζουμε:

$$\int_0^\pi x^2 y \cos z\, dz = x^2 y \int_0^\pi \cos z\, dz = x^2 y \sin z\Big|_0^\pi = 0 \tag{3}$$

και άρα

$$\iiint_D x^2 y \cos z\, dxdydz = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} 0\, dy\Big)\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0.$$

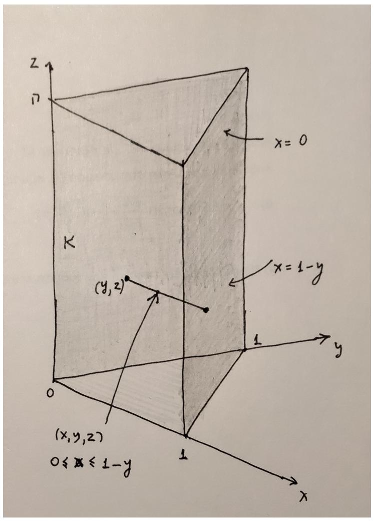
Θα μπορούσαμε να συντομεύσουμε τους υπολογισμούς χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το ότι το K είναι πρώτου τύπου. Απλά, στον τύπο (2) υπολογίζουμε πρώτα το εσωτερικό ολοκλήρωμα, όπως κάναμε ήδη στον τύπο (3), και έτσι έχουμε

$$\iiint_D x^2 y \cos z\, dxdydz = \iint_K \Big(\int_0^\pi x^2 y \cos z\, dz\Big)\, dxdy = \iint_K 0\, dxdy = 0.$$

Το ίδιο χωρίο D περιγράφεται και με άλλο τρόπο:

$$D = \{(x,y,z)\,|\, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le \pi, 0 \le x \le 1-y\} = \{(x,y,z)\,|\,(y,z) \in K, 0 \le x \le 1-y\},$$

όπου K είναι τώρα το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $K = [0,1] \times [0,\pi]$ στο yz-επίπεδο. Δηλαδή το D είναι χωρίο τρίτου τύπου στον χώρο με $\psi_1(y,z) = 0$ και $\psi_2(y,z) = 1-y$ για $(y,z) \in K$.



Επομένως

$$\iiint_D x^2 y \cos z\, dxdydz = \iint_K \Big(\int_0^{1-y} x^2 y \cos z\, dx\Big)\, dydz.$$

Και τώρα, επειδή $K = [0,1] \times [0,\pi]$, έχουμε ότι

$$\iiint_D x^2 y \cos z\, dxdydz = \int_0^1 \Big(\int_0^\pi \Big(\int_0^{1-y} x^2 y \cos z\, dx\Big)\, dz\Big)\, dy.$$

Υπολογίζουμε

$$\int_0^{1-y} x^2 y \cos z\, dx = y \cos z \int_0^{1-y} x^2\, dx = y \cos z\, \big(\tfrac{x^3}{3}\big)\Big|_0^{1-y} = y \cos z \tfrac{(1-y)^3}{3}.$$

Κατόπιν,

$$\int_0^\pi \Big(\int_0^{1-y} x^2 y \cos z\, dx\Big)\, dz = \tfrac{y(1-y)^3}{3} \int_0^1 \cos z\, dz = \tfrac{y(1-y)^3}{3}\, 0 = 0.$$

Άρα

$$\iiint_D x^2 y \cos z\, dxdydz = \int_0^1 0\, dy = 0.$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε τον όγκο μιας μπάλας ως συνάρτηση της ακτίνας της. Επειδή ο όγκος της μπάλας δεν εξαρτάται από την θέση της, θα υποθέσουμε για απλοποίηση ότι το κέντρο της είναι το σημείο $(0, 0, 0)$ και η ακτίνα της $R > 0$. Τότε η μπάλα περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

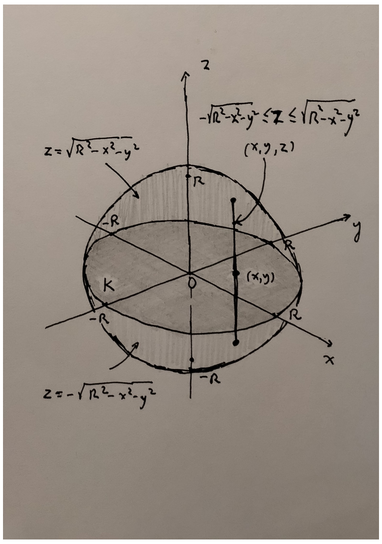
Από την σχέση $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ η οποία καθορίζει την μπάλα D, παρατηρούμε ότι το ζευγάρι (x, y) πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $x^2 + y^2 \leq R^2$, και μάλιστα για κάθε (x, y) που ικανοποιεί την $x^2 + y^2 \leq R^2$ το z ικανοποιεί την σχέση $z^2 \leq R^2 - x^2 - y^2$ και άρα παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $[-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}]$. Άρα η μπάλα D περιγράφεται και ως εξής:

$$D = \Big\{(x, y, z) \,\Big|\, x^2 + y^2 \leq R^2, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\Big\}.$$

Όμως, η σχέση $x^2 + y^2 \leq R^2$ καθορίζει τον δίσκο K στο xy-επίπεδο με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα R. Επομένως η μπάλα D γράφεται

$$D = \Big\{(x, y, z) \,\Big|\, (x, y) \in K, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\Big\},$$

δηλαδή είναι χωρίο πρώτου τύπου στον χώρο που ορίζεται από τις $\psi_1(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ και $\psi_2(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ για $(x, y) \in K$.



Άρα

$$V(D) = \iiint_D dxdydz = \iint_K \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \Big) dxdy.$$

Προφανώς,

$$\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz = 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Άρα

$$V(D) = \iiint_D dxdydz = 2 \iint_K \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy.$$

Από εδώ ο πιο σύντομος δρόμος για να συνεχίσουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αλλαγής σε πολικές συντεταγμένες (r, θ), αφού ο δίσκος K αντιστοιχεί στο $r\theta$-επίπεδο στο χωρίο

$$E = \{(r, \theta) \,|\, 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = [0, R] \times [0, 2\pi].$$

Έτσι, με $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (και άρα $x^2 + y^2 = r^2$), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} V(D) &= 2 \iint_E \sqrt{R^2 - r^2}\, rdrd\theta = 2 \int_0^R \Big(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, d\theta \Big) dr \\ &= 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r \Big(\int_0^{2\pi} d\theta \Big) dr = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr. \end{aligned}$$

Τώρα με αλλαγή μεταβλητής $t = R^2 - r^2$ καταλήγουμε στο

$$V(D) = 2\pi \int_0^{R^2} \sqrt{t}\, dt = \tfrac{4\pi}{3} R^3.$$