Απειροστικός Λογισμός III, χειμερινό εξάμηνο 2022-23.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. Έστω $R = [a, b] \times [c, d]$. Αποδείξτε ότι $\iint_R g(x)h(y)\, dxdy = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy$. Βάσει αυτού υπολογίστε τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα

   i. $\iint_R (xy)^2 \cos(x^3)\, dxdy$, όπου $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

   ii. $\iint_R x^m y^n\, dxdy$ $(m, n \geq 0)$, όπου $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

   iii. $\iint_R \frac{x^3 y}{y^2+1}\, dxdy$, όπου $R = [0, 2] \times [-1, 1]$.

2. (*) Αναγνωρίστε τον μοναδιαίο δίσκο $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ως χωρίο πρώτου τύπου και δεύτερου τύπου και γράψτε με δύο τρόπους το $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ βάσει των τύπων του Fubini.

3. (*) Αναγνωρίστε το χωρίο D που βρίσκεται ανάμεσα στην ευθεία με εξίσωση $y = x$ και στην παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ ως χωρίο πρώτου τύπου και δεύτερου τύπου και γράψτε με δύο τρόπους το $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ βάσει των τύπων του Fubini.

4. Έστω D το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στον x-άξονα, στον y-άξονα και στην ευθεία με εξίσωση $2x + 5y = 10$. Υπολογίστε το $\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$.

5. Έστω D το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στον y-άξονα και στην παραβολή με εξίσωση $x = 4 - y^2$. Υπολογίστε το $\iint_D x^3 y\, dxdy$.

6. Έστω D το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στους κύκλους με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνες 1 και 2 και στο ημιεπίπεδο πάνω από τον x-άξονα. Υπολογίστε το $\iint_D (xy + 1)\, dxdy$.

7. Έστω D το τριγωνικό χωρίο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(2, 0)$ και $(0, 2)$. Υπολογίστε το $\iint_D xy\, dxdy$.

8. Έστω D το τριγωνικό χωρίο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 3)$ και $(2, 2)$. Υπολογίστε το $\iint_D e^{x-y}\, dxdy$.

9. Γράψτε καθένα από τα παρακάτω διαδοχικά ολοκληρώματα ως ολοκλήρωμα σε συγκεκριμένο χωρίο D, το οποίο είναι πρώτου και δεύτερου τύπου, και κατόπιν αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης βάσει των τύπων του Fubini.

   i. $\int_0^1 \big(\int_0^{x^2} f(x, y)\, dy \big)\, dx$.

   ii. $\int_0^1 \big(\int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\, dy \big)\, dx$.

   iii. $\int_0^1 \big(\int_1^{e^x} f(x, y)\, dy \big)\, dx$.

   iv. $\int_{-2}^2 \big(\int_0^{4-y^2} f(x, y)\, dx \big)\, dy$.

   v. $\int_0^3 \big(\int_{-x}^{x} f(x, y)\, dy \big)\, dx$.

   vi. $\int_0^1 \big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy \big)\, dx$.

   vii. $\int_0^{\pi/2} \big(\int_0^{\cos x} f(x, y)\, dy \big)\, dx$.

   viii (*) $\int_1^2 \big(\int_{2x}^{3x+1} f(x, y)\, dy \big)\, dx$.

   ix. $\int_1^2 \big(\int_{\log x}^{e^x} f(x, y)\, dy \big)\, dx$.

   x. $\int_0^2 \big(\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{0} f(x, y)\, dx \big)\, dy$.

xi. $\int_0^3 \big(\int_0^{\mathrm{Arccos}\,\frac{y}{3}} f(x,y)\,dx \big)\,dy$.

10. Γράψτε καθένα από τα παρακάτω διαδοχικά ολοκληρώματα ως ολοκλήρωμα σε συγκεκριμένο χωρίο D, το οποίο είναι δεύτερου τύπου αλλά όχι πρώτου τύπου. Χωρίστε το D σε δύο υποχωρία πρώτου τύπου και κατόπιν αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης βάσει των τύπων του Fubini.

    i. $\int_{-1}^1 \big(\int_{-2|y|}^{|y|} f(x,y)\,dx \big)\,dy$.

    ii. $\int_{-3}^2 \big(\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx \big)\,dy$.

11. Δείτε αν υπολογίζονται σχετικά εύκολα τα παρακάτω διαδοχικά ολοκληρώματα. Κατόπιν γράψτε τα ως διπλά ολοκληρώματα σε συγκεκριμένα χωρία D, τα οποία είναι πρώτου και δεύτερου τύπου, αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης βάσει των τύπων του Fubini και υπολογίστε τα πιο εύκολα.

    i. $\int_0^1 \big(\int_0^1 ye^{xy}\,dy \big)\,dx$.

    ii. $\int_0^a \big(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}\,dy \big)\,dx$. ($a > 0$).

    iii. $\int_1^2 \big(\int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{e^{2y}+1}\,dy \big)\,dx$.

    iv. $\int_0^1 \big(\int_y^1 \sin(x^2)\,dx \big)\,dy$.

    v. $\int_0^4 \big(\int_{\frac{y}{2}}^2 e^{x^2}\,dx \big)\,dy$

    vi. $\int_0^1 \big(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dx \big)\,dy$.

12. Σχεδιάστε το στερεό του οποίου ο όγκος ισούται με το $\int_0^1 \big(\int_0^1 (5-x-y)\,dy \big)\,dx$.

13. Σχεδιάστε το στερεό του οποίου ο όγκος ισούται με το $\int_0^3 \big(\int_0^2 (9+x^2+y^2)\,dx \big)\,dy$.

14. Υπολογίστε τον όγκο του κατακόρυφου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο ορθογώνιο $[1,2]\times[0,1]$ του xy-επιπέδου και του γραφήματος της συνάρτησης $f(x,y) = 1+2x+3y$.

15. Υπολογίστε τον όγκο του κατακόρυφου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο ορθογώνιο $[-1,1]\times[-3,-2]$ του xy-επιπέδου και του γραφήματος της συνάρτησης $f(x,y) = x^4+y^2$.

16. Υπολογίστε τον όγκο του κατακόρυφου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο ορθογώνιο $[0,1]\times[0,1]$ του xy-επιπέδου και του γραφήματος της συνάρτησης $f(x,y) = xy$.

17. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο xz-επίπεδο, στο yz-επίπεδο, στο xy-επίπεδο, στα επίπεδα με εξισώσεις $x = 1$ και $y = 1$ και στην επιφάνεια με εξίσωση $z = x^2+y^4$.

18. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο xy-επίπεδο, στα επίπεδα με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ και $y = \frac{\pi}{2}$ και στην επιφάνεια με εξίσωση $z = \sin y$.

19. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο επίπεδο με εξίσωση $z = 16$ και στην επιφάνεια με εξίσωση $z = x^2+y^2$.

20. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 \big(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \big)\,dx = \frac{\pi}{4}$ και $\int_0^1 \big(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \big)\,dy = -\frac{\pi}{4}$. Δεν θα έπρεπε να είναι ίσα τα δύο ολοκληρώματα;

Απαντήσεις.

1. i. $\frac{\sin 1}{9}$
   i. $\frac{1}{(m+1)(n+1)}$
   iii. 0

2. $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\big)\,dx = \int_{-1}^{1}\big(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\big)\,dy$

3. $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\big(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\big)\,dx = \int_0^1\big(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\big)\,dy$

4. $\frac{145}{6}$

5. 0

6. $\frac{3\pi}{2}$

7. $\frac{2}{3}$

8. $1+e^{-2}$

9. i. $\int_0^1\big(\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dx\big)\,dy$
   ii. $\int_0^1\big(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx\big)\,dy$
   iii. $\int_1^e\big(\int_{\log y}^1 f(x,y)\,dx\big)\,dy$
   iv. $\int_0^4\big(\int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} f(x,y)\,dy\big)\,dx$
   v. $\int_{-3}^3\big(\int_{|y|}^3 f(x,y)\,dx\big)\,dy$
   vi. $\int_0^1\big(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\big)\,dy$
   vii. $\int_0^1\big(\int_0^{\mathrm{Arccos}\,y} f(x,y)\,dx\big)\,dy$
   viii. $\int_2^4\big(\int_1^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\big)\,dy + \int_4^7\big(\int_{\frac{y-1}{3}}^2 f(x,y)\,dx\big)\,dy$
   ix. $\int_0^{\log 2}\big(\int_1^{e^y} f(x,y)\,dx\big)\,dy + \int_{\log 2}^e\big(\int_1^2 f(x,y)\,dx\big)\,dy + \int_e^{e^2}\big(\int_{\log y}^2 f(x,y)\,dx\big)\,dy$
   x. $\int_{-3}^{-\sqrt{5}}\big(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy\big)\,dx + \int_{-\sqrt{5}}^0\big(\int_0^2 f(x,y)\,dy\big)\,dx$
   xi. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\int_0^{3\cos x} f(x,y)\,dy\big)\,dx$

10. i. $\int_{-2}^0\big(\int_{-\frac{x}{2}}^1 f(x,y)\,dy\big)\,dx + \int_0^1\big(\int_x^1 f(x,y)\,dy\big)\,dx + \int_{-2}^0\big(\int_{-1}^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy\big)\,dx$
    $+\int_0^1\big(\int_{-1}^{-x} f(x,y)\,dy\big)\,dx$
    ii. $\int_0^4\big(\int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,dy\big)\,dx + \int_0^9\big(\int_{-3}^{-\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\big)\,dx$

11. i. $e-2$
    ii. $\frac{2a^3}{3}$
    iii. $\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$
    iv. $\frac{1-\cos 1}{2}$
    v. e^4-1
    vi. $\frac{e-1}{3}$

14. $\frac{11}{2}$

15. $\frac{196}{15}$

16. $\frac{1}{4}$

17. $\frac{8}{15}$

18. 1

19. 128π