Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2022-23.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. (*) Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $(x, y) = T(u, v)$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D e^x y \, dxdy$, όπου D είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία $(-1, 0)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$ και $(1, 2)$. Φροντίστε ώστε η γραμμική απεικόνιση να αντιστοιχίζει το D σε ορθογώνιο E στο uv-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.

2. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $(x, y) = T(u, v)$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D xy \, dxdy$, όπου D είναι το παραλληλόγραμμο που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις $y = x$, $y = x + 3$, $y = 3x$ και $y = 3x - 4$. Φροντίστε ώστε η γραμμική απεικόνιση να αντιστοιχίζει το D σε ορθογώνιο E στο uv-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.

3. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $(x, y) = T(u, v)$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D (x+y) \, dxdy$, όπου D είναι το ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(3, 4)$ και $(4, 3)$. Φροντίστε ώστε η γραμμική απεικόνιση να αντιστοιχίζει το D σε ορθογώνιο E στο uv-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.

4. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $(x, y) = T(u, v)$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D (x + y^2) \, dxdy$, όπου D είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(-3, 2)$, $(2, -1)$ και $(1, -2)$. Φροντίστε ώστε η γραμμική απεικόνιση να αντιστοιχίζει το D σε τρίγωνο E στο uv-επίπεδο με δύο από τις πλευρές του παράλληλες στους κύριους άξονες.

5. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $(x, y) = T(u, v)$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D xy \, dxdy$, όπου D είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 0)$, $(2, 1)$ και $(-1, 3)$. Φροντίστε ώστε η γραμμική απεικόνιση να αντιστοιχίζει το D σε τρίγωνο E στο uv-επίπεδο με δύο από τις πλευρές του παράλληλες στους κύριους άξονες.

6. (*) Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το $\iint_D x \, dxdy$, όπου D είναι ο δίσκος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας 2.

7. (*) Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το $\iint_D xy \, dxdy$, όπου D είναι το χωρίο στο δεξιό xy-ημιεπίπεδο που βρίσκεται ανάμεσα στους κύκλους κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνων 1 και 2 και στις ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$.

8. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το $\iint_D x^2 \, dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που καθορίζεται από τις ανισώσεις $0 \leq x \leq y$ και $x^2 + y^2 \leq 1$.

9. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το $\iint_D e^{x^2+y^2} \, dxdy$, όπου D είναι ο δίσκος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $a > 0$.

10. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το $\iint_D e^{-x^2-y^2} \, dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που καθορίζεται από τις ανισώσεις $y \leq 0$ και $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

11. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το $\iint_D (x^4 + y^4 + 2x^2y^2) \, dxdy$, όπου D είναι το μέρος του δίσκου κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας 1 που βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου.

12. (*) Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το $\iint_D x \, dxdy$, όπου D είναι ο δίσκος κέντρου $(2, 3)$ και ακτίνας 2.

13. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $(x, y) = T(u, v)$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D \frac{1}{x+y}\, dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ και $x + y = 4$.

    Υπόδειξη: Αν ξεκινήσετε ορίζοντας $u = x$, $v = x + y$, θα δείτε ότι το D αντιστοιχίζεται σε τετράπλευρο E στο uv-επίπεδο με τρεις από τις πλευρές του παράλληλες στους κύριους άξονες, αλλά και ότι ταυτόχρονα απλοποιείται η συνάρτηση $\frac{1}{x+y}$.

14. Θεωρώντας κατάλληλη απεικόνιση $(x, y) = T(u, v)$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου και ανάμεσα στις καμπύλες με εξισώσεις $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ και $x^2 - y^2 = 4$. Φροντίστε ώστε η απεικόνιση να αντιστοιχίζει το D σε ορθογώνιο E στο uv-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.

    Υπόδειξη: Η απεικόνιση δεν θα είναι γραμμική. Ξεκινήστε ορίζοντας τα u, v συναρτήσει των x, y με τρόπο που υπαγορεύεται από την μορφή των εξισώσεων των καμπυλών και μετά λύστε ως προς x, y συναρτήσει των u, v.

15. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, υπολογίστε το $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που καθορίζεται από τις ανισώσεις $x + y \geq 1$ και $x^2 + y^2 \leq 1$.

    Υπόδειξη: Ο υπολογισμός είναι πιο εύκολος αν καθορίσετε πρώτα το διάστημα στο οποίο κυμαίνεται η πολική γωνία θ του σημείου $(x, y) \in D$.

16. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $(x, y) = T(u, v)$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D \cos\left(\pi \frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$, όπου D είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

    Υπόδειξη: Αν ξεκινήσετε ορίζοντας $u = x + y$, $v = x - y$, θα δείτε ότι το D αντιστοιχίζεται σε τρίγωνο E στο uv-επίπεδο με δύο από τις πλευρές του παράλληλες στους κύριους άξονες, αλλά και ότι ταυτόχρονα απλοποιείται η συνάρτηση $\cos\left(\pi \frac{x-y}{x+y}\right)$.

17. Ορίζοντας $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 + y^2 - 2y$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D xe^y\, dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που καθορίζεται από τις ανισώσεις $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ και $x^2 + y^2 \geq 2y$. Σχεδιάστε το D και το αντίστοιχο χωρίο E στο uv-επίπεδο.

18. Έστω D το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου που καθορίζεται από την ανίσωση $x^{3/2} + y^{3/2} \leq a^{3/2}$ με $a > 0$. Μετασχηματίστε το $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ σε ολοκλήρωμα στο τρίγωνο E του uv-επιπέδου που καθορίζεται από τις ανισώσεις $0 \leq u \leq a$ και $0 \leq v \leq a - u$.

19. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $(x, y) = T(u, v)$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dxdy$, όπου D είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$. Φροντίστε ώστε με την αλλαγή μεταβλητής να απλοποιηθεί η παράσταση $\frac{y-x}{y+x}$.

    Υπόδειξη: Δοκιμάστε τους τύπους $u = x + y$, $v = x - y$.

20. Θεωρώντας κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $(x, y) = T(u, v)$, υπολογίστε μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητής το $\iint_D \cos \frac{\pi(2x-y)}{2(x-2y)}\, dxdy$, όπου D είναι το τρίγωνο ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις $y = x$, $x + y = 0$ και $x - 2y = 2$. Φροντίστε ώστε με την αλλαγή μεταβλητής να απλοποιηθεί η παράσταση $\frac{2x-y}{x-2y}$.

    Υπόδειξη: Δοκιμάστε τους τύπους $u = 2x - y$, $v = x - 2y$.

Απαντήσεις.

1. $3e^2 - 9e + 3 + 3e^{-1}$
2. $\frac{79}{2}$
3. 24
4. $\frac{11}{2}$
5. $\frac{35}{24}$
6. 0
7. 0
8. $\frac{\pi-2}{32}$
9. $\pi(e^{a^2} - 1)$
10. $\frac{\pi}{2}(e^{-1} - e^{-9})$
11. $\frac{\pi}{12}$
12. 8π
13. 3
14. 6
15. $\frac{1}{2}$
16. 0
17. $e^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}$
18. $\frac{4a^{\frac{2}{3}}}{9} \iint_E f(a^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}) u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}}\, du dv.$
19. $\frac{e-e^{-1}}{4}$
20. $\frac{8}{3\pi}$