

## Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2022-23.

### Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (\*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

- Υπολογίστε το  $\iiint_R x^2 dx dy dz$ , όπου  $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .
- Υπολογίστε το  $\iiint_R e^{-xy} y dx dy dz$ , όπου  $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .
- (\*) Σχεδιάστε το χωρίο  $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ , και γράψτε το  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$  ως διπλό ολοκλήρωμα σε χωρίο  $K$  του  $xy$ -επιπέδου. Κατόπιν, στο  $K$  κάντε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.
- Γράψτε το  $\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^y f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$  ως τριπλό ολοκλήρωμα σε συγκεκριμένο χωρίο  $D$  στον  $\mathbb{R}^3$ , σχεδιάστε το  $D$  και γράψτε πέντε ακόμη διαφορετικές μορφές του τριπλού ολοκληρώματος ως διαδοχή τριών απλών ολοκληρωμάτων.
- Γράψτε το  $\int_0^2 \left( \int_0^3 \left( \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz$  ως τριπλό ολοκλήρωμα σε συγκεκριμένο χωρίο  $D$  στον  $\mathbb{R}^3$ , σχεδιάστε το  $D$  και γράψτε πέντε ακόμη διαφορετικές μορφές του τριπλού ολοκληρώματος ως διαδοχή τριών απλών ολοκληρωμάτων.
- Γράψτε το  $\int_0^1 \left( \int_{1-x}^1 \left( \int_x^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$  ως τριπλό ολοκλήρωμα σε συγκεκριμένο χωρίο  $D$  στον  $\mathbb{R}^3$ , σχεδιάστε το  $D$  και γράψτε πέντε ακόμη διαφορετικές μορφές του τριπλού ολοκληρώματος ως διαδοχή τριών απλών ολοκληρωμάτων.
- Σχεδιάστε το χωρίο  $D = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$  και υπολογίστε το  $\iiint_D x^2 dx dy dz$ .
- Σχεδιάστε το χωρίο  $D = \{(x, y, z) \mid 1/2 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  και υπολογίστε το  $\iiint_D z dx dy dz$ .
- Σχεδιάστε το χωρίο  $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$  και υπολογίστε το  $\iiint_D \sin x dx dy dz$ .
- Σχεδιάστε το χωρίο  $D = \{(x, y, z) \mid z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$  και υπολογίστε το  $\iiint_D x^2 dx dy dz$ .
- Σχεδιάστε το χωρίο  $D = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$  και υπολογίστε το  $\iiint_D z dx dy dz$ .
- Σχεδιάστε την πυραμίδα  $D$  με κορυφές  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  και  $(0, 0, 1)$  και υπολογίστε το  $\iiint_D (1 - z^2) dx dy dz$ .
- Σχεδιάστε το φραγμένο χωρίο  $D$  που ορίζεται από το παραβολοειδές με εξίσωση  $z = 2x^2 + y^2$  και από τον κύλινδρο με εξίσωση  $z = 8 - y^2$  και υπολογίστε τον όγκο του.
- Σχεδιάστε το φραγμένο χωρίο  $D$  που ορίζεται από τις επιφάνειες με εξισώσεις  $z = 0$ ,  $x^2 + 2y^2 = 2$  και  $x + y + 2z = 2$  και υπολογίστε τον όγκο του.
- Σχεδιάστε το φραγμένο χωρίο  $D$  που βρίσκεται ανάμεσα στο παραβολοειδές με εξίσωση  $z = x^2 + y^2$  και στον κώνο με εξίσωση  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  και υπολογίστε τον όγκο του.
- Σχεδιάστε το φραγμένο χωρίο  $D$  που ορίζεται από τα επίπεδα με εξισώσεις  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y = 4$  και  $z = x + y + 1$  και υπολογίστε τον όγκο του.
- Σχεδιάστε το φραγμένο χωρίο  $D$  που ορίζεται από τους κυλίνδρους με εξισώσεις  $x^2 + y^2 = a^2$  και  $x^2 + z^2 = a^2$  και υπολογίστε τον όγκο του.

### Απαντήσεις.

1.  $1/3$
2.  $e^{-1}$
3.  $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ ,  
$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_K \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$
$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_r^{\sqrt{1-r^2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz \right) r dr \right) d\theta.$$
4.  $\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_z^x f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx, \int_0^1 \left( \int_y^1 \left( \int_0^y f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy,$   
 $\int_0^1 \left( \int_0^y \left( \int_y^1 f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy, \int_0^1 \left( \int_z^1 \left( \int_z^x f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz,$   
 $\int_0^1 \left( \int_z^1 \left( \int_y^1 f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$
5.  $\int_0^2 \left( \int_{-3}^3 \left( \int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz, \int_0^3 \left( \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \left( \int_0^2 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx,$   
 $\int_0^3 \left( \int_0^2 \left( \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx, \int_{-3}^3 \left( \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \left( \int_0^2 f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy,$   
 $\int_{-3}^3 \left( \int_0^2 \left( \int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy$
6.  $\int_0^1 \left( \int_x^1 \left( \int_{1-x}^1 f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx, \int_0^1 \left( \int_{1-y}^1 \left( \int_x^1 f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy,$   
 $\int_0^1 \left( \int_{1-y}^1 \left( \int_{1-y}^z f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy, \int_0^1 \left( \int_0^z \left( \int_{1-x}^1 f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz,$   
 $\int_0^1 \left( \int_{1-z}^1 \left( \int_{1-y}^z f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$
7.  $4\pi/3$
8.  $9\pi/32$
9.  $\pi$
10.  $(64 - 33\sqrt{3})\pi/15$
- 11.
12.  $1/30$
13.  $16\pi$
14.  $\pi\sqrt{2}$
15.  $\pi/6$
16.  $88/3$
17.  $16a^3/3$