Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2022-23.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Στις παρακάτω ασκήσεις (εκτός των δύο πρώτων) χρησιμοποιήστε αλλαγή σε σφαιρικές ή σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων ή ως παραδείγματα.

1. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D xy\,dxdydz$, όπου D είναι το παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τα επίπεδα με εξισώσεις $x+2y+z=4$, $x+2y+z=-5$, $2x-y+z=-2$, $2x-y+z=7$, $x+y+3z=3$ και $x+y+3z=-2$.

2. Υπολογίστε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα επίπεδα με εξισώσεις $2x-y-z=3$, $2x-y-z=-3$, $x+y-z=-7$, $x+y-z=4$, $4x+3y-z=8$ και $4x+3y-z=2$.

3. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz$, όπου D είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0,0,0)$.

4. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D xy\,dxdydz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ και βρίσκεται ανάμεσα στις σφαίρες κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνων 2 και 3.

5. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $x\geq 0$, $y\geq 0$, $4\leq x^2+y^2+z^2\leq 16$ και $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$.

6. (*) Υπολογίστε τον όγκο μιας μπάλας ακτίνας $R>0$ χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες. Συγκρίνατε με τον υπολογισμό με χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων.

7. Υπολογίστε το $\iiint_D \frac{1}{\sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}\,dxdydz$, όπου D είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0,0,0)$.

8. Υπολογίστε το $\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz$, όπου D είναι ο σφαιρικός δακτύλιος ανάμεσα στις σφαίρες κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνων a και b ($0<a<b$).

9. Υπολογίστε το $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)xyz\,dxdydz$, όπου $D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leq R^2, z\geq 0\}$.

10. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, όπου $D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leq R^2, x\leq 0, y\leq 0, z\geq 0\}$.

11. (*) Υπολογίστε το $\int_0^3 \big(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \big(\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}\,dz\big)\,dy\big)\,dx$, κάνοντας αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες.

12. Θεωρούμε το ελλειψοειδές $D=\{(x,y,z)\,|\,(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2\leq 1\}$ ($a,b,c>0$). Υπολογίστε τον όγκο του D κάνοντας πρώτα αλλαγή μεταβλητής μέσω της συνάρτησης $(x,y,z)=T(u,v,w)=(au,bv,cw)$ και, κατόπιν, αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες.

13. Υπολογίστε το $\iiint_D z\,dxdydz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $x\geq 0$, $y\geq 0$, $0\leq z\leq 1$ και $x^2+y^2\leq 1$.

14. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D x\,dxdydz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $x\geq 0$, $x^2+y^2\leq 1$ και $0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}$.

15. (*) Υπολογίστε το $\iiint e^{x^2+y^2-z}\,dxdydz$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις $y\geq 0$, $1\leq x^2+y^2\leq 4$ και $-1\leq z\leq 3$.

16. Υπολογίστε το $\iiint_D ze^{x^2+y^2}\,dxdydz$, όπου $D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leq 4, 2\leq z\leq 3\}$.

17. Υπολογίστε το $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, με $D = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2 \le 2, -2 \le z \le 3\}$.

18. (*) Υπολογίστε το $\iiint_D (1+\sqrt{x^2+y^2})\,dxdydz$, όπου $D = \{(x,y,z) \,|\, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$, χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες.

19. (*) Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iiint_D 1/(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^a\,dxdydz$, όπου $a > 0$ και D είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0,0,0)$.

20. (*) Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iiint_D 1/(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^a\,dxdydz$, όπου $a > 0$ και $D = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 \ge 1\}$.

21. Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D 1/\sqrt{xy}\,dxdy$, όπου $D = [0,1] \times [0,1]$.

22. Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D 1/(x^a y^b)\,dxdy$, όπου $a > 0$, $b > 0$ και $D = [0,1] \times [0,1]$.

23. Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D 1/(x^a y^b)\,dxdy$, όπου $a > 0$, $b > 0$ και $D = [1,+\infty) \times [1,+\infty)$.

24. Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D y/x\,dxdy$, όπου D είναι το φραγμένο χωρίο που ορίζεται από τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = y$ και $x = 2y$.

25. Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D x^{-3/2} e^{y-x}\,dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις σχέσεις $0 \le y \le x < +\infty$.

26. Μελετήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D xye^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, όπου D είναι το χωρίο που ορίζεται από τις σχέσεις $0 \le x < +\infty$ και $0 \le y \le 1$.

27. Θεωρήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, όπου $D = \mathbb{R}^2$ είναι ολόκληρο το xy-επίπεδο. Γράψτε το I ως όριο του $\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ όταν $R \to +\infty$, όπου $D_R = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \le R^2\}$, και υπολογίστε την τιμή του I. Κατόπιν, γράψτε το I ως όριο του $\iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ όταν $R \to +\infty$, όπου $Q_R = [-R,R] \times [-R,R]$, και αποδείξτε ότι $I = J^2$, όπου J είναι το γενικευμένο ολοκλήρωμα μίας μεταβλητής $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Υπολογίστε την τιμή του J.

28. Θεωρήστε το γεν. ολοκλήρωμα $I = \iint_D e^{-xy}\,dxdy$, όπου $D = [0,+\infty) \times [1,2]$. Γράψτε το I ως όριο του $\iint_{D_R} e^{-xy}\,dxdy$ όταν $R \to +\infty$, όπου $D_R = [0,R] \times [1,2]$. Χρησιμοποιήστε και τους δύο τύπους του Fubini για το ολοκλήρωμα στο D_R και μέσω ενός από τους δύο υπολογίστε την τιμή του I. Μέσω του δεύτερου τύπου, αποδείξτε ότι $I = J$, όπου J είναι το γενικευμένο ολοκλήρωμα μίας μεταβλητής $\int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-2x})/x\,dx$. Υπολογίστε την τιμή του J. Προσέξτε: για ποιόν λόγο είναι το J γεν. ολοκλήρωμα;

Απαντήσεις.

1. $2835/4$

2. $99/2$

3. $4\pi(e-1)3$

4. $211/15$

5. $15\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

6. $(4\pi/3)R^3$
7. $8\pi(\sqrt{2}-1)/3$
8. $4\pi \log \frac{b}{a}$
9. 0
10. $(\pi/10)R^5$
11. $(\pi/8)\log 82$
12. $(4\pi/3)abc$
13. $\pi/6$
14. $1/2$
15. $\pi(e^5 - e - e^2 - e^{-2})/2$
16. $5\pi(e^4-1)/2$
17. $100\pi/3$
18. $\pi/2$
19. $I = +\infty$, αν $a \geq 3$, και $I = 4\pi/(3-a)$, αν $0 < a < 3$.
20. $I = +\infty$, αν $0 < a \leq 3$, και $I = 4\pi/(a-3)$, αν $a > 3$.
21. $I = 4$
22. $I = +\infty$, αν $a \geq 1$ ή $b \geq 1$, και $I = 1/((1-a)(1-b))$, αν $0 < a < 1$ και $0 < b < 1$.
23. $I = +\infty$, αν $a \leq 1$ ή $b \leq 1$, και $I = 1/((a-1)(b-1))$, αν $a > 1$ και $b > 1$.
24. $3/16$
25. Το I συγκλίνει
26. $I = (e-1)/(4e)$
27. $I = \pi$, $J = \sqrt{\pi}$
28. $I = \log 2$, $J = \log 2$. Το J είναι γεν. ολοκλήρωμα *μόνο* επειδή το $[0, +\infty)$ δεν είναι φραγμένο διάστημα.