Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2022-23.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε την καμπύλη $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ όταν $\boldsymbol{\sigma}(0) = (0, 2, 5)$ και $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (4t^3, \sin t, 5e^t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

2. Βρείτε καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ με τροχιά το σύνολο $\{(x, y) \,|\, y = x^2\}$ καθώς και καμπύλη $\boldsymbol{\rho}$ με τροχιά το σύνολο $\{(x, y) \,|\, 3x^2 + 2y^2 = 4\}$.

3. Βρείτε την συνάρτηση μήκους τόξου της καμπύλης με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Βρείτε την συνάρτηση μήκους τόξου της καμπύλης με τύπο $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \geq 0$.

5. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} x \sin z \, dS$ όταν $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [\pi, 2\pi]$.

6. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \cos^2 z \, dS$ όταν $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

7. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} xy \, dS$ όταν $\boldsymbol{\sigma}$ είναι καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, 1)$.

8. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} (x + y) \, dS$ όταν $\boldsymbol{\sigma}$ είναι καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$.

9. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} yz \, dS$ όταν $\boldsymbol{\sigma}$ είναι καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις $y = x$ και $z = x^2$ από το σημείο $(0, 0, 0)$ μέχρι το σημείο $(2, 2, 4)$.

10. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} (x + z) \, dS$ όταν $\boldsymbol{\sigma}$ είναι καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z = x$ και $y^2 + z^2 = 1$.

11. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x, y) = y^2$ κατά μήκος του γραφήματος της $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$.

12. Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ όταν $\mathbf{f}(x, y) = (y, x)$ και $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η καμπύλη που διαγράφει το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ από το σημείο $(1, 0)$ μέχρι το σημείο $(0, 1)$.

13. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ όταν $\boldsymbol{\sigma}(t) = (1, t, t^2)$, $t \in [0, 2]$, και $f(x, y, z) = (y, z, x)$.

14. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ όταν $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, e^t, t^2)$, $t \in [0, 1]$, και $f(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.

15. Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} (x \, dy - y \, dx)$ όταν $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

16. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} (x \, dx + z \, dy + y \, dz)$ όταν $\boldsymbol{\sigma}$ είναι καμπύλη η οποία διαγράφει την τομή των επιφανειών με εξισώσεις $x = y$ και $z = e^y$ από το σημείο $(0, 0, 1)$ στο σημείο $(1, 1, e)$.

17. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} (y \, dx + x \, dy + z \, dz)$ όταν $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις $y = 1$ και $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ με την θετική φορά περιστροφής καθώς κοιτάμε την τροχιά από το σημείο $(0, 2, 0)$.

18. Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} (x \, dx + y \, dy + z \, dz)$ όταν $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η καμπύλη που διαγράφει μία φορά το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ με την θετική φορά περιστροφής καθώς κοιτάμε την τροχιά από το σημείο $(0, 0, 0)$.

19. Υπολογίστε τό $\int_{\boldsymbol{\sigma}} (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$ όταν $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά την τομή των επιφανειών με εξισώσεις $x + y = 2$ και $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ με την θετική φορά περιστροφής καθώς κοιτάμε την τροχιά από το σημείο $(0, 0, 0)$.

20. Με τί ισούται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\mathbf{f}$ κατά μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$ όταν σε κάθε σημείο $\mathbf{a}$ της τροχιάς το $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της τροχιάς στο σημείο $\mathbf{a}$;

21. Με τί ισούται το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} dS$;

22. Σχεδιάστε την επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x + y + z = 1$ και $x^2 + 2y^2 \leq 1$ και υπολογίστε το εμβαδόν της.

23. Υπολογίστε το εμβαδόν του τμήματος της σφαίρας κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας 1 που βρίσκεται πάνω από τον κώνο με εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

24. Υπολογίστε το εμβαδόν της σφαίρας ακτίνας $R > 0$.

25. Θεωρήστε την επιφάνεια με τύπο $\mathbf{\Sigma}(u, v) = ((R + \cos u) \cos v, (R + \cos u) \sin v, \sin u)$, $u, v \in [0, 2\pi]$, με $R > 1$. Η επιφάνεια αυτή ονομάζεται *τόρος*. Σχεδιάστε την επιφάνεια και υπολογίστε το εμβαδόν της.

26. Σχεδιάστε την κυλινδρική επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 = R^2$ και $a \leq z \leq b$ και υπολογίστε το εμβαδόν της.

27. Είπαμε ότι τα δύο μοναδιαία κάθετα διανύσματα στο γράφημα μιας συνάρτησης $z = f(x, y)$ είναι τα $\mathbf{N} = \pm \frac{(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1)}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 1}}$. Ποιό από αυτά κατευθύνεται προς τα πάνω;

28. Έστω $0 \leq a < b$ και συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$. Σχεδιάστε το γράφημα της f στο xz-επίπεδο καθώς και την επιφάνεια που προκύπτει με πλήρη περιστροφή του γραφήματος γύρω από τον z-άξονα. Πεισθήτε ότι η επιφάνεια αυτή μπορεί να παραμετρικοποιηθεί με την συνάρτηση $\mathbf{\Sigma}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$, $u \in [a, b], v \in [0, 2\pi]$, και υπολογίστε το εμβαδόν της.

29. Υπολογίστε ως διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 3, 3)$.

30. Σχεδιάστε την επιφάνεια με τύπο $\mathbf{\Sigma}(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, v)$, $u \in [0, 1], v \in [0, \pi]$, και υπολογίστε το εμβαδόν της.

31. Σχεδιάστε την επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 \leq 4$ και $z = xy$ και υπολογίστε το εμβαδόν της.

32. Αν $0 \leq a < b$, υπολογίστε το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας που ορίζεται από τις σχέσεις $z^2 = x^2 + y^2$ και $a \leq z \leq b$ με δύο τρόπους: με καρτεσιανές συντεταγμένες και με κυλινδρικές συντεταγμένες.

33. Σχεδιάστε την επιφάνεια που ορίζεται από τις $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και $0 < x^2 + y^2 \leq 1$. Αποδείξτε ότι δεν μπορούμε να βάψουμε την επιφάνεια αλλά μπορούμε να χτίσουμε τον χώρο που βρίσκεται κάτω από αυτήν και πάνω από το xy-επίπεδο.

34. Υπολογίστε το εμβαδόν της σφαίρας ακτίνας $R > 0$.

35. Υπολογίστε το εμβαδόν του μέρους της κυλινδρικής επιφάνειας με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$, το οποίο βρίσκεται στον ημιχώρο που ορίζεται από την $x \geq 0$ και ανάμεσα στα επίπεδα με εξισώσεις $x = y$, $x = -y$, $z = 0$ και $z = 2 - x - y$.

36. Υπολογίστε το εμβαδόν του μέρους του κώνου με εξίσωση $x^2 + y^2 = z^2$ που βρίσκεται μέσα στην σφαίρα με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, όπου $R > 0$.

37. Υπολογίστε το $\iint_{\mathbf{\Sigma}} x \, dA$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ και $z = x^2 + y$.

38. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} z^2\, dA$ στην μοναδιαία σφαίρα κέντρου $(0,0,0)$.

39. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} z\, dA$ στο άνω ημισφαίριο της μοναδιαίας σφαίρας κέντρου $(0,0,0)$.

40. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} x\, dA$ στο τρίγωνο με κορυφές $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$.

41. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(3x-2y+z)\, dA$ στο μέρος του επιπέδου με εξίσωση $2x+3y+z=6$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο του χώρου το οποίο ορίζεται από τις $x\geq 0$, $y\geq 0$ και $z\geq 0$.

42. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(x^2+y^2)z\, dA$ στο μέρος του επιπέδου με εξίσωση $z=4+x+y$ που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο με εξίσωση $x^2+y^2=4$.

43. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\Sigma}$, όπου $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,z,y)$ και $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η επιφάνεια η οποία περιγράφεται από τις $x^2+y^2\leq 1$ και $z=x+3y$ και έχει τέτοιον προσανατολισμό ώστε τα κάθετα διανύσματα που επάγει να κατευθύνονται προς την πάνω μεριά της.

44. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(y\, dy\wedge dz+z\, dz\wedge dx+z\, dx\wedge dy)$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η επιφάνεια η οποία περιγράφεται από τις $x^2+y^2+z^2=1$ και $y\geq 0$ και έχει τέτοιον προσανατολισμό ώστε τα κάθετα διανύσματα που επάγει να κατευθύνονται μακρυά από το σημείο $(0,0,0)$.

45. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(x\, dy\wedge dz+y\, dz\wedge dx+z^2\, dx\wedge dy)$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η επιφάνεια η οποία περιγράφεται από τις $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ και $0\leq z\leq 1$ και έχει τέτοιον προσανατολισμό ώστε τα κάθετα διανύσματα που επάγει να κατευθύνονται μακρυά από τον z-άξονα.

46. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(2x\, dy\wedge dz+2y\, dz\wedge dx+(x^2+y^2)\, dx\wedge dy)$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι το σύνορο του φραγμένου χωρίου D που ορίζεται από τις $0\leq z\leq 1-x^2-y^2$ και έχει τέτοιον προσανατολισμό ώστε τα κάθετα διανύσματα που επάγει να κατευθύνονται προς την εξωτερική μεριά του χωρίου D.

Απαντήσεις.

1. $\boldsymbol{\sigma}(t)=(t^4, 3-\cos t, 5e^t)$, $t\in\mathbb{R}$.

2. $\boldsymbol{\sigma}(t)=(t,t^2)$, $t\in\mathbb{R}$, και $\boldsymbol{\rho}(t)=\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t, \sqrt{2}\sin t\big)$, $t\in[0,2\pi]$.

3. $S(t)=t$, $t\in[0,2\pi]$.

4. $S(t)=\sqrt{2}\, t$, $t\geq 0$.

5. 0.

6. $\pi\sqrt{2}$.

7. $\frac{6+\sqrt{2}}{6}$.

8. $1+\sqrt{2}$.

9. $\frac{149\sqrt{2}}{15}$.

10. 0.

11. $\frac{(e^2+1)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}}{3}$.

12. 0.
13. $\frac{20}{3}$.
14. $e+\frac{1}{2}$.
15. 2π.
16. $e+\frac{1}{2}$.
17. 0.
18. 0.
19. $2\pi\sqrt{2}$.
20. 0.
21. Με το μήκος της **σ**.
22. $\pi\sqrt{\frac{3}{2}}$.
23. $\pi(2-\sqrt{2})$.
24. $4\pi R^2$.
25. $4\pi^2 R$.
26. $2\pi R(b-a)$.
27. Το **N** με το πρόσημο $-$.
28. $2\pi\int_a^b u\sqrt{(f'(u))^2+1}\,du$.
29. $\frac{\sqrt{21}}{2}$.
30. $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$.
31. $\frac{2\pi(5\sqrt{5}-1)}{3}$.
32. $\pi(b^2-a^2)\sqrt{2}$.
33. Πεπερασμένος όγκος, άπειρο εμβαδόν.
34. $4\pi R^2$.
35. $2\pi-2$.
36. $\pi\sqrt{2}\,R^2$.
37. $\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}$.
38. $\frac{4\pi}{3}$.
39. π.
40. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.
41. $\frac{25\sqrt{14}}{2}$.
42. $32\pi\sqrt{3}$.

43. 0.

44. $\frac{2}{3}$.

45. 12π.

46. $\frac{8\pi}{3}$.