Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2022-23.

Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green, υπολογίστε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}}(y\,dx - x\,dy)$, όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η συνοριακή καμπύλη του τετραγώνου $[-1,1]\times[-1,1]$ με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το τετράγωνο.

2. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green, υπολογίστε το εμβαδόν ελλειπτικού χωρίου με ημιάξονες $a, b > 0$

3. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green, υπολογίστε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}}((y^2 + x^3)\,dx + x^4\,dy)$, όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η συνοριακή καμπύλη του τετραγώνου $[0,1]\times[0,1]$ με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το τετράγωνο.

4. Επαληθεύστε το Θεώρημα του Green για τις συναρτήσεις $P = -\frac{y}{x^2+y^2}$ και $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$ στον δακτύλιο που ορίζεται από τις $0 < R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R_2$.

5. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green, υπολογίστε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}}(2xy\,dx + 3xy^2\,dy)$, όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η συνοριακή καμπύλη του τετραπλεύρου με κορυφές $(-2,1)$, $(-2,-3)$, $(1,0)$, $(1,7)$ με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με το τετράπλευρο.

6. Θεωρούμε το χωρίο D που προκύπτει αν από το τετράγωνο $[-2,7]\times[-3,6]$ αφαιρέσουμε τους δύο ανοικτούς δίσκους με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και ακτίνα 1 και με κέντρο $(3,3)$ και ακτίνα 2. Υπολογίστε το $\sum_{j=1}^{3}\oint_{\boldsymbol{\sigma}_j}\big(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\big)$, όπου $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ είναι οι συνοριακές καμπύλες του D με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με το D. Μπορείτε να υπολογίσετε απευθείας τα επικαμπύλια ολοκληρώματα ή προτιμάτε να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα του Green;

7. Έστω αριθμητική συνάρτηση f ορισμένη στο χωρίο D και αρμονική σ' αυτό. Δηλαδή ισχύει $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ στο D. Αν $\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_k$ είναι οι συνοριακές κλειστές καμπύλες του D με την θετική φορά διαγραφής τους σε σχέση με το D, υπολογίστε το

$$\sum_{j=1}^{k}\oint_{\boldsymbol{\sigma}_j}\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}\,dx - \tfrac{\partial f}{\partial x}\,dy\big).$$

   Μήπως η προηγούμενη άσκηση είναι ειδική περίπτωση αυτής εδώ;

8. Αποδείξτε ότι

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}}(PQ\,dx + PQ\,dy) = \iint_D \big(Q(\tfrac{\partial P}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}) + P(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial Q}{\partial y})\big)\,dxdy.$$

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}}\big((Q\tfrac{\partial P}{\partial x} - P\tfrac{\partial Q}{\partial x})\,dx + (P\tfrac{\partial Q}{\partial y} - Q\tfrac{\partial P}{\partial y})\,dy\big) = 2\iint_D \big(P\tfrac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y} - Q\tfrac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\big)\,dxdy.$$

9. Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z) = (y^2, -x^2, z^2)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 \leq 1$ και $x + y + z = 3$.

10. Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z) = (-y, x, z)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και $z \leq 0$.

11. Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z) = (y,z,x)$ στην τετράπλευρη επιφάνεια που βρίσκεται στο επίπεδο με εξίσωση $2x + 3y + z = 5$ και έχει κορυφές τα σημεία $(-1,1,4)$, $(2,1,-2)$, $(2,3,-8)$ και $(-1,3,-2)$.

12. Υπολογίστε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ όταν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή καμπύλη μίας επιφάνειας $\boldsymbol{\Sigma}$.

13. Υπολογίστε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x, y, z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$ όταν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή καμπύλη μίας επιφάνειας $\boldsymbol{\Sigma}$.

14. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^3, -y^3, 0)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι το ημισφαίριο που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2+z^2 = 1$ και $x \geq 0$.

15. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^3, -z^3, 0)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι το ημισφαίριο που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2+z^2 = 1$ και $x \geq 0$ και τα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το σημείο $(0, 0, 0)$.

16. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, x^3y^2z)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ και $z \leq 0$ και τα κάθετα διανύσματά της έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω.

17. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x, y, z) = (-y + xz + yz^2, x + xyz^3, x^2z^4)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η ένωση της επιφάνειας που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 = 1$ και $0 \leq z \leq 1$ και της επιφάνειας που ορίζεται από τις $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ και $z \geq 1$ και τα κάθετα διανύσματα της $\boldsymbol{\Sigma}$ κατευθύνονται προς τον z-άξονα.

18. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}} (-y^3\, dx + x^3\, dy - z^3\, dz)$ όταν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η καμπύλη που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 = 1$ και $x + y + z = 1$.

19. Αποδείξτε ότι $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = 0$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, -z, y) \times \mathbf{g}(x, y, z)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και $x \geq 1/2$.

20. Έστω $\boldsymbol{\Sigma}_1$ και $\boldsymbol{\Sigma}_2$ δύο επιφάνειες με την ίδια κλειστή συνοριακή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$. Περιγράψτε την σχέση ανάμεσα στους προσανατολισμούς των δύο επιφανειών ώστε να ισχύει

$$\iint_{\boldsymbol{\Sigma}_1} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}_1 = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}_2} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}_2$$

για κάθε $\mathbf{f}$.

21. Αν $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι μια επιφάνεια και $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή της καμπύλη με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με την $\boldsymbol{\Sigma}$, αποδείξτε ότι

$$2 \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \oint_{\boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{v} \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

όπου $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ και $\mathbf{v}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα.

22. Αν $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι μια επιφάνεια και $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή της καμπύλη με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με την $\boldsymbol{\Sigma}$, αποδείξτε ότι

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} (f\, \nabla g) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}, \qquad \oint_{\boldsymbol{\sigma}} (f\, \nabla g + g\, \nabla f) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0.$$

23. Επαληθεύστε τον τύπο του Gauss για τον κύβο $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ και την $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$.

24. Επαληθεύστε τον τύπο του Gauss για την μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και την $\mathbf{f}(x, y, z) = (-y, x, z)$.

25. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και $\mathbf{f}(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ απομακρύνονται από το κέντρο της σφαίρας.

26. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια του χωρίου που ορίζεται από τις $x^2 + y^2 \leq 1$ και $-1 \leq z \leq 1$ και $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το εξωτερικό του χωρίου.

27. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια του χωρίου που ορίζεται από τις $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ και $x \geq 0$ και $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z, xz)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το εσωτερικό του χωρίου.

28. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV$, όπου Ω είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και $\mathbf{f}(x, y, z) = (y(x^2 + y^2 + z^2)^2, -x(x^2 + y^2 + z^2)^2, 1 - (x^2 + y^2 + z^2)^3)$.

29. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\Sigma}(x^2 + y + z)\, dA$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το $(0, 0, 0)$.

30. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια του κύβου $[0, 1]\times[0, 1]\times[0, 1]$ και $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το εξωτερικό του κύβου.

31. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια της πυραμίδας με κορυφές τα $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ και $(1, 1, 0)$ και $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2y, 3y^2z, 9xz^2)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το εσωτερικό της πυραμίδας.

32. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια του φραγμένου χωρίου που ορίζεται από τις επιφάνειες με εξισώσεις $x = y^2$, $x = 9$, $z = 0$ και $x = z$ και $\mathbf{f}(x, y, z) = (3x - 5y, 4z - 2y, 8yz)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το εξωτερικό του χωρίου.

33. Με τις κατάλληλες υποθέσεις, αποδείξτε ότι

$$\iiint_{\Omega}(\nabla\phi) \cdot \mathbf{f}\, dV = \oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \phi\, \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} - \iiint_{\Omega} \phi\, \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV.$$

34. Με τις κατάλληλες υποθέσεις, αποδείξτε τις **ταυτότητες του Green**:

$$\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \phi\, \nabla\psi \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint_{\Omega}(\phi\, \Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi)\, dV.$$

$$\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}}(\phi\, \nabla\psi - \psi\, \nabla\phi) \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint_{\Omega}(\phi\, \Delta\psi - \psi\Delta\phi)\, dV.$$

35. Υπολογίστε το $\iint_{\Sigma} z\, dA$ στο κάτω ημισφαίριο της μοναδιαίας σφαίρας κέντρου $(1, 1, 2)$

36. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ στο μέρος του επιπέδου με εξίσωση $x + y + z = 3$ που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο με εξίσωση $(x - 1)^2 + z^2 = 4$, όταν $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, x, y)$.

37. Υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(x\, dy \wedge dz + z\, dz \wedge dx + y\, dx \wedge dy)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις $y^2 + (z - 2)^2 = 4$, $1 \leq x \leq 3$ και έχει προσανατολισμό τέτοιο ώστε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα σ' αυτήν να κατευθύνονται μακρυά από τον άξονα συμμετρίας της.

38. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green, υπολογίστε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}_1} y\, dx + \oint_{\boldsymbol{\sigma}_2} y\, dx + \oint_{\boldsymbol{\sigma}_3} y\, dx$, όπου $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3$ είναι οι κλειστές συνοριακές καμπύλες του χωρίου στο xy-επίπεδο, το οποίο προκύπτει αν από τον δίσκο κέντρου $(3, 1)$ και ακτίνας 4 αφαιρεθούν οι μοναδιαίοι δίσκοι κέντρων $(1, 2)$ και $(2, -1)$. Οι καμπύλες πρέπει να έχουν την θετική φορά περιστροφής σε σχέση με το χωρίο.

39. Υπολογίστε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, όπου $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 3xy)$ και $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κλειστή πολυγωνική γραμμή με διαδοχικές κορυφές $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(7, 1)$, $(2, 3)$, $(-1, 3)$.

40. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x, y, z) = (xyz, -z + xy, y + xz)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η ένωση της επιφάνειας που ορίζεται από τις $y^2 + z^2 = 1, 0 \leq x \leq 1$ και της επιφάνειας που ορίζεται από τις $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 1$, και τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα της $\boldsymbol{\Sigma}$ κατευθύνονται προς τον x-άξονα.

41. Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x, y, z) = (-y^2, x^2, -z^2)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις $x^2 + z^2 \leq 1$, $x + y + z = 1$.

42. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\Sigma}(x^4 + y^4 + z^4)\, dA$ στην μοναδιαία σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$.

43. Επαληθεύστε τον τύπο του Gauss με το $\oiint_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$, με $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, x, z)$ και $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια του τετραέδρου με κορυφές $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

44. Υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, με $\mathbf{f}(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, z^2)$ και όπου $\boldsymbol{\sigma}$ είναι καμπύλη με αρχή το $(0, 0, 1)$ και τέλος το $(0, \pi, 0)$.

Απαντήσεις.

1. -8.
2. πab.
3. 0.
4. $0 = 0$.
5. 332.25.
6. 0.
7. 0.
9. $0 = 0$.
10. $\pm 2\pi = \pm 2\pi$, ανάλογα με τους προσανατολισμούς.
11. $\pm 36 = \pm 36$, ανάλογα με τους προσανατολισμούς.
12. 0.
13. 0.
14. 0.
15. $-\frac{3\pi}{4}$.
16. -2π.
17. -2π.
18. $\pm\frac{3\pi}{2}$, ανάλογα με τον προσανατολισμό της $\boldsymbol{\sigma}$.
23. $3 = 3$.

24. $\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

25. $\frac{8\pi}{3}$.

26. π.

27. $-\frac{4}{15}$.

28. 0.

29. $\frac{4\pi}{3}$.

30. 3.

31. $-\frac{11}{10}$.

32. $-\frac{100959}{35}$.

35. 3π.

36. $\pm 12\pi$, ανάλογα με τον προσανατολισμό.

37. 0.

38. -14π.

39. 51.

40. -2π.

41. $\pm\frac{3\pi}{2} = \pm\frac{3\pi}{2}$, ανάλογα με τους προσανατολισμούς.

42. $\pm\frac{12\pi}{5}$, ανάλογα με τον προσανατολισμό.

43. $\pm\frac{1}{6}$, ανάλογα με τον προσανατολισμό.

44. $-\frac{1}{3}$.