Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Πρώτη πρόοδος, 29.03.2019.

1. Αποδείξτε ότι το σύνορο bd A ενός φραγμένου συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές.

2. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$\{(x_1, x_2) \,|\, e^{x_1} \geq x_2 \text{ και } x_1^2 \leq 2 - x_2^2\}$$

είναι συμπαγές.

3. Αποδείξτε με δύο τρόπους ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = (3 + x_1 + x_1 x_2, x_1 - 2x_2 + x_2^2)$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και βρείτε τον πίνακα $f'(0, 0)$.

4. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στον $\mathbb{R}^n$.

5. Έστω ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^n$. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο A και οι μερικές παράγωγοι των συντεταγμένων συναρτήσεων της f είναι συνεχείς στο A και ισχύει

$$\det f'(a) \neq 0$$

για κάθε $a \in A$. Αποδείξτε ότι το $f(A)$ είναι ανοικτό.

6. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ στην μορφή $f(x, y_1, y_2)$ ώστε κάθε συντεταγμένη συνάρτηση της f να έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στον $\mathbb{R}^3$. Έστω $f(3, -1, 2) = (0, 0)$ και

$$f'(3, -1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g = (g_1, g_2) : X \to \mathbb{R}^2$, όπου X είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, ώστε $3 \in X$ και $g(3) = (-1, 2)$ και

$$f(x, g_1(x), g_2(x)) = (0, 0)$$

για κάθε $x \in X$. Βρείτε την $g'(3)$.