Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Δεύτερη πρόοδος, 20.06.2019.

Η διάρκεια του διαγωνίσματος είναι μιάμιση ώρα.

1. (i) Θεωρήστε την γενική 0-διαφορική μορφή (δηλαδή συνάρτηση) $\omega : A \to \mathbb{R}$ στο ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και αποδείξτε ότι $d(d\omega) = 0$.
   (ii) Αποδείξτε ότι $d(d\omega) = 0$ και για την γενική 1-διαφορική μορφή ω στο A με τύπο
   $$\omega(x) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(x)\, dx_j, \qquad \omega_j : A \to \mathbb{R}.$$

2. Θεωρήστε την $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο
   $$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2, x_3) = (e^{x_2 + x_3}, \sin(x_1 x_3))$$
   και υπολογίστε τις διαφορικές μορφές $f^*(dy_1)$, $f^*(dy_2)$ στον $\mathbb{R}^3$. Κατόπιν θεωρήστε την διαφορική μορφή ω στον $\mathbb{R}^2$ με τύπο
   $$\omega = y_1\, dy_1 + y_2\, dy_2$$
   και επιβεβαιώστε την σχέση $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega))$.

3. (i) Αποδείξτε ότι για την γενική στοιχειώδη 2-επιφάνεια $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^n$ ισχύει $\partial(\partial c) = 0$.
   (ii) Αποδείξτε ότι για την γενική στοιχειώδη 3-επιφάνεια $c : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^n$ ισχύει $\partial(\partial c) = 0$.

4. Έστω $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$.
   Αποδείξτε ότι η διαφορική 1-μορφή
   $$\omega(x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_2$$
   στο A είναι κλειστή.
   Θεωρήστε την στοιχειώδη 1-επιφάνεια (δηλαδή καμπύλη) $c : [0,1] \to A$ με τύπο
   $$c(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0), \qquad t \in [0,1],$$
   υπολογίστε το $\int_c \omega$ και βρείτε το σύνορο ∂c.
   Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Stokes, αποδείξτε ότι:
   (i) δεν υπάρχει στοιχειώδης 2-επιφάνεια $d : [0,1]^2 \to A$ ώστε $c = \partial d$.
   (ii) η ω δεν είναι ακριβής: δεν υπάρχει διαφορική 0-μορφή (δηλαδή συνάρτηση) $f : A \to \mathbb{R}$ ώστε $df = \omega$.