Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 21-2-2012.

1. Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί; Σε κάθε περίπτωση κατανοήστε τις διαστάσεις του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών. Τέλος, για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό βρείτε τον αντίστοιχο πίνακά του.

$$f(x)=(3x,-4x),\quad f(x)=(3x+2,x),\quad f(x)=(x^2,x),\quad f(x_1,x_2)=2x_1-x_2\,,$$

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2\,,\quad f(x_1,x_2)=2x_1-x_2+1,\quad f(x_1,x_2)=(x_1,3x_1-x_2),$$

$$f(x_1,x_2)=(x_1+2,x_1-x_2),\quad f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3,3x_1-x_2),$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_3,3x_2-x_1,x_1+x_3),\quad f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3^2,x_2-x_1,x_2\sin x_1).$$

2. **Ορισμός.** *Έστω γραμμικός μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι ο T **διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο** αν $\langle T(x'),T(x'')\rangle=\langle x',x''\rangle$ για κάθε $x',x''\in\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι ο T **διατηρεί τη νόρμα** αν $|T(x)|=|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$.*

   [α] Αποδείξτε ότι ο T διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν διατηρεί τη νόρμα.

   Υπόδειξη: Η μια κατεύθυνση είναι εύκολη. Για την άλλη χρησιμοποιήστε τον τύπο $\langle x',x''\rangle=\frac{1}{2}(|x'+x''|^2-|x'|^2-|x''|^2)$.

   Ορισμός. *Αν ο γραμμικός μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο ή, ισοδύναμα, τη νόρμα λέμε ότι ο T είναι **ορθογώνιος**. Αν οι στήλες ενός $n\times n$ πίνακα A αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ λέμε ότι ο πίνακας είναι **ορθογώνιος**.*

   [β] Αν ο γραμμικός μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνιος, αποδείξτε ότι ο πίνακάς του ως προς οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνιος. Αντιστρόφως, αν ο πίνακας του T ως προς μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνιος, αποδείξτε ότι ο T είναι ορθογώνιος.

   [γ] Έστω $n\times n$ πίνακας A. Αποδείξτε ότι ο A είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν $A^\top A=I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος $n\times n$ πίνακας και ο $A^\top$ είναι ο συμμετρικός πίνακας. Αν ο A είναι ορθογώνιος, αποδείξτε ότι $AA^\top=I$, οπότε και ο $A^\top$ είναι ορθογώνιος πίνακας. Αποδείξτε ότι ο A είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν οι γραμμές του αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι ο A είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=A^\top$.

3. Έστω γραμμικός μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Οι γραμμές που ακολουθούν αποδεικνύουν ότι υπάρχει αριθμός $M\geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|T(x)|\leq M|x|$$

   για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Βεβαιωθείτε ότι τις κατανοείτε.

$$\begin{aligned}|T(x)|&=|T(\textstyle\sum_{k=1}^n x_ke_k)=|\sum_{k=1}^n x_kT(e_k)|\leq\sum_{k=1}^n|x_k||T(e_k)|\\&\leq\sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^n|T(e_k)|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n|x_k|^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^n|T(e_k)|^2}\,|x|.\end{aligned}$$

4. [α] Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι ανοικτό σύνολο και ότι κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι κλειστό σύνολο.

   [β] **Ορισμός.** *Έστω $a\in\mathbb{R}^n$ και $r>0$. Το σύνολο $S(a;r)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x-a|=r\}$ ονομάζεται **σφαίρα** στον $\mathbb{R}^n$.*

   Αποδείξτε ότι κάθε σφαίρα $S(a;r)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x-a|=r\}$ είναι κλειστό σύνολο. Βρείτε τα εσωτερικά, τα εξωτερικά και τα συνοριακά σημεία της σφαίρας $S(a;r)$.

   [γ] **Ορισμός.** *Έστω $a\in\mathbb{R}^n$, $a\neq 0$, $t\in\mathbb{R}$. Το $\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\langle x,a\rangle=t\}$ ονομάζεται*

υπερεπίπεδο *στον* $\mathbb{R}^n$. *Τα* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle \leq t\}$ *και* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle \geq t\}$ *ονομάζονται* ***κλειστοί ημίχωροι*** *του* $\mathbb{R}^n$. *Τέλος, τα* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle < t\}$ *και* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle > t\}$ *ονομάζονται* ***ανοικτοί ημίχωροι*** *του* $\mathbb{R}^n$.

Αποδείξτε ότι κάθε υπερεπίπεδο και κάθε κλειστός ημίχωρος είναι κλειστό σύνολο και ότι κάθε ανοικτός ημίχωρος είναι ανοικτό σύνολο. Βρείτε τα εσωτερικά σημεία, τα εξωτερικά σημεία και τα συνοριακά σημεία όλων αυτών των συνόλων.

5. Αποδείξτε ότι, αν σε ένα ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ επισυνάψουμε τα συνοριακά του σημεία, τότε το σύνολο που προκύπτει είναι κλειστό. Αποδείξτε ότι, αν από ένα κλειστό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ αφαιρέσουμε τα συνοριακά του σημεία, τότε το σύνολο που προκύπτει είναι ανοικτό.
6. Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένωση ανοικτών μπαλών καθώς και ένωση κλειστών μπαλών.
7. Αποδείξτε ότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής.

   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη βασική ανισότητα από την άσκηση 3.