

Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 11-6-2012.

1. Έστω γραμμικός χώρος V και $k, l \in \mathbb{N}$.

[α] Αν $T, S \in \mathcal{T}^k(V)$ και $a \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $T + S, aT \in \mathcal{T}^k(V)$.

[β] Αν $T, T_1, T_2 \in \mathcal{T}^k(V)$, $S, S_1, S_2 \in \mathcal{T}^l(V)$ και $a \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$(T_1 + T_2) \otimes S = T_1 \otimes S + T_2 \otimes S, \quad T \otimes (S_1 + S_2) = T \otimes S_1 + T \otimes S_2, \\ (aT) \otimes S = a(T \otimes S) = T \otimes (aS).$$

2. Έστω γραμμικός χώρος V με $\dim V = n$ και βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$ και $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι, αν θεωρήσουμε οποιουδήποτε n^k αριθμούς $\rho_{i_1 \dots i_k}$ για κάθε $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, τότε υπάρχει μοναδικός $T \in \mathcal{T}^k(V)$ ώστε

$$T(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = \rho_{i_1 \dots i_k}$$

για κάθε $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$.

3. Έστω γραμμικοί χώροι V, W , γραμμικός τελεστής $f : V \rightarrow W$ και $k, l \in \mathbb{N}$.

[α] Αν $T \in \mathcal{T}^k(W)$, αποδείξτε ότι $f^*T \in \mathcal{T}^k(V)$.

[β] Αν $T, T_1, T_2 \in \mathcal{T}^k(W)$ και $a \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$f^*(T_1 + T_2) = f^*T_1 + f^*T_2, \quad f^*(aT) = af^*T.$$

[γ] Αν $T \in \mathcal{T}^k(W)$, $S \in \mathcal{T}^l(W)$, αποδείξτε ότι

$$f^*(T \otimes S) = f^*T \otimes f^*S.$$

4. Έστω γραμμικός χώρος V με $\dim V = n$, T ένα εσωτερικό γινόμενο στον V . Αποδείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ (δηλαδή γραμμικός τελεστής f ο οποίος είναι $1 - 1$ και επί) ώστε

$$f^*T = \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$ του V ορθοκανονική ως προς το T και f ώστε $f(e_j) = v_j$ για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$.

5. Έστω γραμμικός χώρος V και $k \in \mathbb{N}$. Αν $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(V)$ και $a \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\omega_1 + \omega_2, a\omega \in \Lambda^k(V)$.

6. Έστω γραμμικός χώρος V και $k \in \mathbb{N}$. Αν $T, T_1, T_2 \in \mathcal{T}^k(V)$ και $a \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$\text{Alt}(T_1 + T_2) = \text{Alt}(T_1) + \text{Alt}(T_2), \quad \text{Alt}(aT) = a\text{Alt}(T).$$

7. Έστω γραμμικοί χώροι V, W , γραμμικός τελεστής $f : V \rightarrow W$ και $k \in \mathbb{N}$.

[α] Αν $T \in \mathcal{T}^k(W)$, αποδείξτε ότι

$$\text{Alt}(f^*T) = f^*\text{Alt}(T).$$

[β] Αν $\omega \in \Lambda^k(W)$, αποδείξτε ότι $f^*\omega \in \Lambda^k(V)$.

8. Έστω γραμμικός χώρος V και $k, l \in \mathbb{N}$. Αν $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(V)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda^l(V)$ και $a \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned}(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta &= \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta, & \omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) &= \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2, \\(a\omega) \wedge \eta &= a(\omega \wedge \eta) = \omega \wedge (a\eta).\end{aligned}$$

9. Έστω γραμμικοί χώροι V, W , γραμμικός τελεστής $f : V \rightarrow W$ και $k, l \in \mathbb{N}$. Αν $\omega \in \Lambda^k(V)$ και $\eta \in \Lambda^l(V)$, αποδείξτε ότι

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta.$$

10. Έστω $\sigma \in S_{n-1}$ και $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι

$$v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)} = \det(\sigma) v_1 \times \dots \times v_{n-1}.$$

11. Έστω $\sigma \in S_k$. Αποδείξτε ότι

$$dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge dx_{i_{\sigma(k)}} = \det(\sigma) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

12. Έστω ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και ανοικτό $B \subseteq \mathbb{R}^m$ και παραγωγίσιμη $f : A \rightarrow B$. Έστω $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, διαφορικές k -μορφές $\omega, \omega_1, \omega_2$ στο B και διαφορική l -μορφή η στο B . Αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned}f^*(\omega_1 + \omega_2) &= f^*\omega_1 + f^*\omega_2, & f^*(g\omega) &= g \circ f \cdot f^*\omega, \\f^*(\omega \wedge \eta) &= f^*\omega \wedge f^*\eta.\end{aligned}$$

13. Έστω ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$, διαφορικές k -μορφές $\omega, \omega_1, \omega_2$ στο A και $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2, \quad d(a\omega) = ad\omega.$$

14. Έστω ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και ανοικτό $B \subseteq \mathbb{R}^m$ και παραγωγίσιμη $f : A \rightarrow B$ και διαφορική k -μορφή ω στο B . Αποδείξτε ότι

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

15. Έστω ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^m$ και n -αλυσίδα c στο A . Αποδείξτε ότι για να υπάρχει $(n+1)$ -αλυσίδα c_1 ώστε $\partial c_1 = c$ είναι αναγκαία συνθήκη να ισχύει $\partial c = 0$.