

Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 12-6-2012.

1. [α] Έστω ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και ανοικτό $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Αν $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$, αποδείξτε ότι

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

- [β] Έστω ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Αν $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$d(fg) = gdf + fdg.$$

2. Έστω καμπύλη $c : [0, 1] \rightarrow A$, όπου A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ συνεχής στο A . Τότε η $f \circ c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι καμπύλη. Αν v είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της c στο $t \in [0, 1]$, δηλαδή αν $v = c'(t)_{c(t)}$, αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα της $f \circ c$ στο t είναι το $f_*(v)$.
3. Έστω καμπύλη $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Αν το $|c(t)|$ είναι σταθερό στο $[0, 1]$, αποδείξτε ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ το διάνυσμα θέσης $c(t)_{c(t)}$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $c'(t)_{c(t)}$.
4. Έστω ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Για βαθμωτό πεδίο $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

και για διανυσματικό πεδίο $F = (P, Q, R) : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ ορίζουμε το βαθμωτό πεδίο

$$\text{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

και το διανυσματικό πεδίο

$$\text{curl} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Επίσης, από το διανυσματικό πεδίο $F = (P, Q, R) : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ ορίζουμε την διαφορική 1-μορφή

$$\omega_F^1 = Pdx + Qdy + Rdz$$

και την διαφορική 2-μορφή

$$\omega_F^2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

- [α] Αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned} df &= \omega_{\text{grad } f}^1 \\ d(\omega_F^1) &= \omega_{\text{curl } F}^2 \\ d(\omega_F^2) &= \text{div} F dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

- [β] Αποδείξτε ότι

$$\text{curl grad } f = 0, \quad \text{div curl } F = 0.$$

- [γ] Έστω ότι το A είναι αστρόμορφο. Αποδείξτε ότι, αν για το διανυσματικό πεδίο F ισχύει $\text{curl} F = 0$ στο A , τότε υπάρχει βαθμωτό πεδίο f ώστε $F = \text{grad } f$ στο A και ότι, αν για το διανυσματικό πεδίο G ισχύει $\text{div} G = 0$ στο A , τότε υπάρχει διανυσματικό πεδίο F ώστε $G = \text{curl } F$ στο A .