Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 13-6-2012.

1*. Έστω ανοικτά $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \to B$ η οποία είναι ένα-προς-ένα και επί του B και ώστε η f καθώς και η $f^{-1} : B \to A$ να είναι παραγωγίσιμες. Αν κάθε κλειστή διαφορική μορφή στο A είναι ακριβής, αποδείξτε ότι κάθε κλειστή διαφορική μορφή στο B είναι ακριβής.

2. Θεωρήστε τις διαφορικές μορφές

$$\omega = xydx + 3dy - yzdz, \qquad \eta = xdx - yz^2dy + 2xdz$$

στον $\mathbb{R}^3$. Αποδείξτε με υπολογισμό ότι

$$dd\omega = 0, \qquad d(\omega \wedge \eta) = d\omega \cdot \eta - \omega \cdot d\eta.$$

3. Έστω $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ και η διαφορική μορφή

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2}dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy$$

στο A.

[α] Αποδείξτε ότι η ω είναι κλειστή.

[β] Αποδείξτε ότι η ω είναι ακριβής.

4. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f(1)$ και η διαφορική 1-μορφή $\omega = fdx$ στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\omega = \lambda dx + dg$$

για κάποια $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1)$.

5. Για κάθε $r > 0$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον ιδιάζοντα 1-κύβο (δηλαδή καμπύλη) $c_{r,n}$ στο $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ με τύπο

$$c_{r,n}(s) = (r \cos(2\pi ns), r \sin(2\pi ns)), \qquad s \in [0, 1].$$

[α] Αν $r_1, r_2 > 0$, θεωρήστε τον ιδιάζοντα 2-κύβο $c : [0, 1] \times [0, 1] \to A$ με τύπο

$$c(s, t) = (1 - t)c_{r_1,n}(s) + tc_{r_2,n}(s), \qquad (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Αποδείξτε ότι

$$c_{r_1,n} - c_{r_2,n} = \partial c.$$

[β**] Έστω ιδιάζων 1-κύβος c στο A με $c(0) = c(1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε να είναι

$$c - c_{1,n} = \partial c'$$

για κάποιον ιδιάζοντα 2-κύβο c' στο A.

[γ] Θεωρήστε την διαφορική 1-μορφή

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

στο A και αποδείξτε ότι

$$\int_{c_{r,n}} \omega = 2\pi n$$

για κάθε $r > 0$ και $n \in \mathbb{Z}$.

[δ] Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes, αποδείξτε ότι, αν $n \neq 0$ και $r > 0$, δεν υπάρχει κανείς ιδιάζων 2-κύβος c ώστε $c_{r,n} = \partial c$.

[ε] Αποδείξτε ότι ο $n \in \mathbb{Z}$ στο [β] (για δεδομένο c) είναι μοναδικός.

6*. Θεωρήστε οποιοδήποτε μιγαδικό πολυώνυμο

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

όπου $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ και με μεταβλητή $z \in \mathbb{C}$. Προφανώς, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ταυτίζοντας κάθε $z = x + iy \in \mathbb{C}$ με το αντίστοιχο ζευγάρι $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε τον ιδιάζοντα 1-κύβο $c_{r,f} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$c_{r,f}(s) = f(c_{r,1}(s)), \qquad t \in [0,1]$$

και τον ιδιάζοντα 2-κύβο $c : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$c(s,t) = tc_{r,n}(s) + (1-t)c_{r,f}(s), \qquad (s,t) \in [0,1] \times [0,1].$$

Δείτε την άσκηση 5 για τον ορισμό του $c_{r,n}$.

[α] Αποδείξτε ότι $\partial c = c_{r,f} - c_{r,n}$ για κάθε r και ότι, αν το r είναι αρκετά μεγάλο, τότε $c_{r,f}([0,1]) \subseteq A$ και $c([0,1] \times [0,1]) \subseteq A$, όπου $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

[β] Χρησιμοποιώντας το [γ] της άσκησης 5, αποδείξτε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας: **το πολυώνυμο p έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{C}$.**