Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 23-2-2012.

1. Είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{αν } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$
συνεχής στο $(0,0)$;
2. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι συμπαγή; Μια κλειστή μπάλα, μια ανοικτή μπάλα, ένα ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο, ένα ευθ. τμήμα (στον $\mathbb{R}^n$), μια ευθεία (στον $\mathbb{R}^n$), ένας κλειστός ημίχωρος, η τομή ενός κλειστού ημίχωρου με μια κλειστή μπάλα, η επιφάνεια μιας μπάλας.
3. Έστω $x_k \to x$, όπου τα x_k και x είναι όλα σημεία του $\mathbb{R}^n$ και ώστε κανένα από τα x_k δεν είναι ίσο με το x. Είναι το σύνολο $\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ συμπαγές;
4. Αποδείξαμε ότι, αν το $K \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, το $F \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό και $K \cap F = \emptyset$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|x - y| \geq \delta$ για κάθε $x \in K$ και $y \in F$.

   [α] Ποιό είναι το δ στις παρακάτω συγκεκριμένες περιπτώσεις;

   Το K είναι μια κλειστή μπάλα και το F μια άλλη κλειστή μπάλα. Το K είναι μια κλειστή μπάλα και το F ένας κλειστός ημίχωρος. Το K είναι μια κλειστή μπάλα και το F είναι η επιφάνεια μιας μπάλας ομόκεντρης με την προηγούμενη αλλά με μεγαλύτερη ακτίνα.

   [β] Βρείτε δυο κλειστά σύνολα $K, F \subseteq \mathbb{R}^2$ τα οποία είναι ξένα ώστε να μην υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|x - y| \geq \delta$ για κάθε $x \in K$ και $y \in F$.
5. Έστω (x_k) μια ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Να δώσετε τον ορισμό της σύγκλισης
$$x_k \to x.$$
   [α] Αν $x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})$ για κάθε k και $x = (x_1, \ldots, x_n)$, αποδείξτε ότι
$$x_k \to x \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad x_{j,k} \to x_j \quad \text{για κάθε} \quad j = 1, \ldots, n.$$
   [β] Αποδείξτε ότι, αν $x_k \to x$ και $y_k \to y$, τότε
$$x_k + y_k \to x + y, \quad |x_k| \to |x|, \quad \langle x_k, y_k \rangle \to \langle x, y \rangle.$$
   [γ] Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$, αποδείξτε ότι το x είναι συνοριακό σημείο του A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x'_k) στο A και ακολουθία (x''_k) στο $\mathbb{R}^n \setminus A$ ώστε $x'_k \to x$ και $x''_k \to x$.

   [δ] Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_k) στο F η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ συνεπάγεται ότι $x \in F$.

   [ε] Αποδείξτε το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass: *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία.*

   [στ] Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία στο K έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του K.