Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 23-2-2012.

1. Αποδείξτε ότι το $\{(x_1,x_2)\,|\,e^{x_1}<x_2\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και το $\{(x_1,x_2)\,|\,e^{x_1}\leq x_2\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
2. Έστω $f(x_1,x_2)=\log(x_1-x_2)-\sin x_1$. Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της f; Αποδείξτε ότι το $\{(x_1,x_2)\,|\,\log(x_1-x_2)<1+\sin x_1\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ενώ το $\{(x_1,x_2)\,|\,\log(x_1-x_2)\leq 1+\sin x_1\}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
3. Έστω $f(x_1,x_2)=\sqrt{x_1}-x_2$. Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της f; Αποδείξτε ότι το $\{(x_1,x_2)\,|\,\sqrt{x_1}<x_2\}$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ενώ το $\{(x_1,x_2)\,|\,\sqrt{x_1}\leq x_2\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
4. [α*] Έστω $f:A(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^m$ συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι για κάθε F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ υπάρχει G κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ώστε $f^{-1}(F)=G\cap A$.

   [β] Έστω $f:A(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^m$ συνεχής στο A. Αν το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, αποδείξτε ότι για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

   [γ*] Έστω $f:A(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^m$ συνεχής στο A. Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, αποδείξτε ότι για κάθε F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.
5. Αποδείξτε ότι το $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,{x_1}^2<{x_2}^2+{x_3}^2, x_1>x_2+x_3\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

   Υπόδειξη: Γράψτε το σύνολο ως τομή δυο συνόλων.
6. [α] Αποδείξτε ότι μια ανοικτή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και μια κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

   [β] Αποδείξτε ότι ένα ανοικτό παραλληλεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ένα κλειστό παραλληλεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

   Υπόδειξη: Γράψτε το σύνολο ως τομή $2n$ συνόλων.

   [γ*] Έστω $f_j:A(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^{m_j}$ συνεχής στο A για κάθε $j=1,\dots,k$. Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $j=1,\dots,k$ έστω U_j ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{m_j}$. Αποδείξτε ότι το $\{x\in A\,|\,f_j(x)\in U_j$ για κάθε $j=1,\dots,k\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

   [δ*] Έστω $f_i:A(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^{m_i}$ συνεχής στο A για κάθε $i\in I$, όπου I οποιοδήποτε σύνολο δεικτών. Έστω A κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $i\in I$ έστω F_i ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{m_i}$. Αποδείξτε ότι το $\{x\in A\,|\,f_i(x)\in F_i$ για κάθε $i\in I\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.
7. Έστω $f:A(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^m$ συνεχής στο A. Αν το K είναι μη-κενό συμπαγές υποσύνολο του A, αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in K$ ώστε $|f(x_1)|\leq|f(x)|\leq|f(x_2)|$ για κάθε $x\in K$.
8. **Ορισμός.** *Έστω μη-κενό* $A\subseteq\mathbb{R}^n$ *και* $y\in\mathbb{R}^n$. *Ονομάζουμε* ***απόσταση του*** y ***από το*** A *την μη-αρνητική ποσότητα*

   $$\mathrm{dist}(y,A)=\inf\{|y-x|\,|\,x\in A\}.$$

   Το infimum υπάρχει διότι το σύνολο $\{|y-x|\,|\,x\in A\}$ είναι μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και κάτω φραγμένο από τον 0.

   Για παράδειγμα, αν $A=B(a;R)$ ή $A=\overline{B}(a;R)$, αποδείξτε ότι $\mathrm{dist}(y,A)=0$, αν $y\in\overline{B}(a;R)$, και $\mathrm{dist}(y,A)=|y-a|-R$, αν $y\notin\overline{B}(a;R)$.

[α] Έστω μη-κενό συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in K$ ώστε $|y - x_1| \leq |y - x| \leq |y - x_2|$ για κάθε $x \in K$. Επομένως, dist$(y, K) = |y - x_1|$. Με άλλα λόγια, η απόσταση του y από το K ισούται με την ελάχιστη απόσταση του y από σημείο του K.

[β*] Έστω μη-κενό κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_1 \in F$ ώστε $|y - x_1| \leq |y - x|$ για κάθε $x \in F$. Επομένως, dist$(y, F) = |y - x_1|$. Με άλλα λόγια, όπως και στο [α] με συμπαγές σύνολο, η απόσταση του y από το F ισούται με την ελάχιστη απόσταση του y από σημείο του F.

[γ*] Έστω μη-κενό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι dist$(y, A) = 0$ αν και μόνο αν το y δεν είναι εξωτερικό σημείο του A (αν και μόνο αν το y είναι εσωτερικό ή συνοριακό σημείο του A).

[δ*] Έστω μη-κενό κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι dist$(y, F) = 0$ αν και μόνο αν $y \in F$.

[ε**] Αποδείξτε ότι

$$|\text{dist}(y', A) - \text{dist}(y'', A)| \leq |y' - y''|$$

για κάθε $y', y'' \in \mathbb{R}^n$ και συμπεράνατε ότι η dist(y, A) ως συνάρτηση του y είναι συνεχής.

Υπόδειξη: Είναι dist$(y', A) \leq |y' - x| \leq |y' - y''| + |y'' - x|$ για κάθε $x \in A$.

9. **Ορισμός.** *Έστω μη-κενά $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Ονομάζουμε* ***απόσταση των A και B*** *την μη-αρνητική ποσότητα*

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| \mid x \in A, y \in B\}.$$

Το infimum υπάρχει διότι το σύνολο $\{|x-y| \mid x \in A, y \in B\}$ είναι μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και κάτω φραγμένο από τον 0.

Για παράδειγμα, αν $A = B(a_1; R_1)$ ή $A = \overline{B}(a_1; R_1)$ και $B = B(a_2; R_2)$ ή $B = \overline{B}(a_2; R_2)$, αποδείξτε ότι dist$(A, B) = 0$, αν $R_1 + R_2 \geq |a_1 - a_2|$, και dist$(y, A) = |a_1 - a_2| - R_1 - R_2$, αν $R_1 + R_2 < |a_1 - a_2|$.

** Χρησιμοποιώντας το [ε] της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι, αν το $K \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι μη-κενό συμπαγές και το $F \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι μη-κενό κλειστό, τότε υπάρχουν $x_1 \in F$ και $y_1 \in K$ ώστε dist$(K, F) = |y_1 - x_1|$.

10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 1 + 3x_1 - 4x_2 - {x_1}^2 + 3x_1x_2 + {x_2}^2.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και ότι

$$f'\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τον τύπο του αντίστοιχου γραμμικού μετασχηματισμού

$$Df\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2} \to 0} \frac{\left| f\left(\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}}$$

11. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 + 2x - x^2 \\ 3 - x + x^3 \end{bmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ότι $f'(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Βρείτε τον τύπο του αντίστοιχου γραμμικού μετασχηματισμού $Df(0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

12. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 + x_1 - 3x_2 + {x_1}^2 + x_1x_2 + {x_3}^2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_1x_2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 \end{bmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και ότι

$$f'\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τον τύπο του αντίστοιχου γραμμικού μετασχηματισμού

$$Df\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$