

Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 6-3-2012.

1. Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \text{αν } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

2. Αποδείξτε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$, η συνάρτηση-προβολή $\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Ποιός είναι ο αντιστοιχος πίνακας της π_k ; Είναι η π_k παραγωγίσιμη στο x και ποιά είναι η $\pi_k'(x)$;
3. Έστω ότι η $f : (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \rightarrow \mathbb{R}$ εξαρτάται μόνο από την k -οστή μεταβλητή x_k . Δηλαδή, $f(x) = g(x_k)$ για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$, όπου $g : (a_k, b_k) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $c_k \in (a_k, b_k)$, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1, \dots, x_{k-1}, c_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ για κάθε $x_1 \in (a_1, b_1), \dots, x_{k-1} \in (a_{k-1}, b_{k-1}), x_{k+1} \in (a_{k+1}, b_{k+1}), \dots, x_n \in (a_n, b_n)$ και

$$f'(x_1, \dots, x_{k-1}, c_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad g'(c_k) \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Η απόδειξη μπορεί να γίνει είτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγωγισιμότητας είτε παρατηρώντας ότι ισχύει $f = g \circ \pi_k : (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \rightarrow \mathbb{R}$ και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης.

4. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγίσης και τις παραγώγους των συναρτήσεων-προβολών από την άσκηση 2, βρείτε τις παραγώγους (σε μορφή πίνακα και σε μορφή γραμμικού μετασχηματισμού) των συναρτήσεων με τύπους

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + e^{x_1 x_2}), \quad f(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_1 x_2)$$

5. [α] Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να είναι $D_2 f(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι ανεξάρτητη της δεύτερης μεταβλητής. Δηλαδή, υπάρχει $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x_1, x_2) = g(x_1)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- [β] Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να είναι $D_1 f(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι ανεξάρτητη της πρώτης μεταβλητής. Δηλαδή, υπάρχει $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x_1, x_2) = g(x_2)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- [γ] Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να είναι $D_1 f(x_1, x_2) = D_2 f(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.
- 6*. Έστω $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \mid x_1 \geq 0\}$.

[α] Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει $D_1 f(x_1, x_2) = D_2 f(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in A$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο A .

Υπόδειξη: Κάθε δυο σημεία του A μπορούν να συνδεθούν με μια πολυγωνική γραμμή η οποία περιέχεται στο A και αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στους δυο άξονες.

[β] Βρείτε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $D_2 f(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in A$ και να μην είναι ανεξάρτητη της δεύτερης μεταβλητής.

7. Έστω $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} g_1(t, 0) dt + \int_0^{x_2} g_2(x_1, t) dt.$$

Ποιό σχήμα διαγράφεται από τα σημεία $(t, 0)$ του πρώτου ολοκληρώματος και από τα σημεία (x_1, t) του δεύτερου ολοκληρώματος; (Θεωρήστε σημεία (x_1, x_2) και στα τέσσερα τεταρτημόρια.)

[α] Αποδείξτε ότι $D_2 f(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

[β] Να ορίσετε την f με παρόμοιο τρόπο ώστε να ισχύει $D_1 f(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

[γ] Βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να είναι $D_1 f(x_1, x_2) = x_1$ και $D_2 f(x_1, x_2) = x_2$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

[δ] Βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να είναι $D_1 f(x_1, x_2) = x_2$ και $D_2 f(x_1, x_2) = x_1$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

8. **Ορισμός.** Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ χαρακτηρίζεται **διγραμμική** αν ισχύει

$$f(\lambda'x' + \lambda''x'', y) = \lambda'f(x', y) + \lambda''f(x'', y)$$

$$f(x, \lambda'y' + \lambda''y'') = \lambda'f(x, y') + \lambda''f(x, y'')$$

για κάθε $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, $y', y'' \in \mathbb{R}^m$ και $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή η $f(x, y)$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός ως προς κάθε μεμονωμένη μεταβλητή x, y .

Ειδική περίπτωση διγραμμικής συνάρτησης είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός. Μια διγραμμική μορφή $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (δηλαδή $m = n$, $p = 1$) χαρακτηρίζεται **εσωτερικό γινόμενο** αν ισχύει

$$f(x, y) = f(y, x), \quad f(x, x) \geq 0$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και

$$f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Παράδειγμα εσωτερικού γινομένου είναι η γνωστή $f(x, y) = \langle x, y \rangle = x^T y$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ διγραμμική μορφή.

[α*] Αποδείξτε ότι υπάρχει $M \geq 0$ ώστε

$$|f(x, y)| \leq M|x||y|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Είναι γνωστό ότι, αν η f είναι εσωτερικό γινόμενο, η ανισότητα αυτή ισχύει με $M = 1$ και ονομάζεται **ανισότητα του Cauchy**.

Υπόδειξη: Μιμηθείτε την απόδειξη που κάναμε για μια ανάλογη ανισότητα για γραμμικούς μετασχηματισμούς.

[β] Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ και

$$Df(a, b)(x, y) = f(x, b) + f(a, y)$$

Θυμηθείτε ότι ο $Df(a, b) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Βρείτε την $f'(a, b)$, δηλαδή τον αντίστοιχο πίνακα του $Df(a, b)$.