

Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 6-3-2012.

1. **Ορισμός.** Έστω $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **ομογενής βαθμού a** αν ισχύει

$$f(tx) = t^a f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ και κάθε $t > 0$. Αν η $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού a και παραγωγίσιμη, αποδείξτε ότι

$$x_1 D_1 f(x) + \cdots + x_n D_n f(x) = a f(x)$$

για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Υπόδειξη: Αν $g(t) = f(tx)$, βρείτε την $g'(1)$.

Παράδειγμα ομογενούς συνάρτησης βαθμού a είναι η $f(x) = |x|^a$. Ελέγξτε τις παραπάνω δυο ιδιότητες για αυτήν την συνάρτηση.

2. [α] **Ορισμός.** Έστω πραγματική συνάρτηση $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ και εσωτερικό σημείο a του A . Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $D_1 f(a), \dots, D_n f(a)$ ονομάζουμε **κλίση** ή **ανάδελτα** της f στο a το

$$\nabla f(a) = \begin{bmatrix} D_1 f(a) \\ \vdots \\ D_n f(a) \end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι για τον ορισμό του $\nabla f(a)$ δεν απαιτείται να είναι η f παραγωγίσιμη στο a . Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο a , τότε προφανώς το $(\nabla f(a))^T$ ταυτίζεται με την παράγωγο (πίνακα) $f'(a)$.

[β] Αποδείξτε το **θεώρημα μέσης τιμής**. Έστω $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ και ευθ. τμήμα $[a, b]$ ώστε κάθε σημείο του $[a, b]$ να είναι εσωτερικό σημείο του A και η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $[a, b]$. Τότε υπάρχει σημείο $c \in [a, b]$ ώστε να είναι

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = (\nabla f(c))^T (b - a) = \langle \nabla f(c), b - a \rangle.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g : [0, 1] \rightarrow A$ με τύπο $g(t) = t(b - a) + a = tb + (1 - t)a$.

3. **Ορισμός.** Ονομάζουμε **καμπύλη** στον $\mathbb{R}^m$ οποιαδήποτε συνάρτηση $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου το I είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ και η σ είναι συνεχής στο I . Το σύνολο τιμών $\sigma(I) = \{\sigma(t) \mid t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **τροχιά της καμπύλης**.

[α] Πεισθήτε με κατάλληλο σχήμα ότι, αν η καμπύλη $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο t_0 εσωτερικό σημείο του I και $\sigma'(t_0) \neq 0$, τότε η ευθεία η οποία εφάπτεται στην τροχιά της καμπύλης σ στο σημείο $\sigma(t_0)$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\sigma'(t_0)$.

[β] Έστω καμπύλη $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ και σημείο $x \in \mathbb{R}^m$. Έστω ότι για κάποιο t_0 εσωτερικό σημείο του I ισχύει $|\sigma(t_0) - x| \leq |\sigma(t) - x|$ για κάθε $t \in I$. Δηλαδή, το $\sigma(t_0)$ είναι σημείο της τροχιάς της καμπύλης με την ελάχιστη απόσταση από το x . Αποδείξτε ότι, αν η καμπύλη είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και $\sigma'(t_0) \neq 0$, τότε το διάνυσμα $\sigma(t_0) - x$ είναι ορθογώνιο στην τροχιά της καμπύλης.

[γ] **Ορισμός.** Έστω $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ και εσωτερικό σημείο a του A και έστω $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Ονομάζουμε **παράγωγο της f στο a στην κατεύθυνση του v** το όριο

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Πρέπει να είναι σαφές ότι το όριο αυτό, αν υπάρχει, είναι διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$.

Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο a . Παρατηρήστε ότι το $D_v f(a)$ είναι το διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο στην εφαπτόμενη ευθεία στην τροχιά της καμπύλης $\sigma_v : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ στο σημείο $\sigma_v(0) = f(a)$, όπου το $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα με το 0 ως εσωτερικό του σημείο και ο τύπος της καμπύλης είναι $\sigma_v(t) = f(a + tv)$. Ποιό είναι το κατάλληλο διάστημα I αν γνωρίζουμε μια μπάλα $B(a; r) \subseteq A$ και το $|v|$; Παρατηρήστε, επίσης, ότι η τροχιά της σ_v περιέχεται στο σύνολο τιμών $f(A)$ και διέρχεται από το σημείο $f(a)$ του συνόλου τιμών. Τέλος, αποδείξτε ότι

$$D_v f(a) = f'(a)v.$$

Παρατηρήστε ότι τα διανύσματα $D_{e_1} f(a), \dots, D_{e_n} f(a)$ είναι οι στήλες του πίνακα $f'(a)$.

[δ] Συνέχεια του [γ]. **Ορισμός.** Το σύνολο των εφαπτόμενων ευθειών των τροχιών των καμπυλών σ_v στο κοινό τους σημείο $f(a)$ ονομάζεται **εφαπτόμενος αφφινικός υπόχωρος** του $\mathbb{R}^m$ στο σύνολο τιμών $f(A)$ στο σημείο $f(a)$.

Αποδείξτε ότι ο εφαπτόμενος αφφινικός υπόχωρος είναι το σύνολο $\{f(a) + f'(a)v \mid v \in \mathbb{R}^n\}$, δηλαδή ο γραμμικός υπόχωρος $\{f'(a)v \mid v \in \mathbb{R}^n\}$ του $\mathbb{R}^m$ "μεταφερμένος" στη θέση $f(a)$. Γνωρίζουμε ότι η διάσταση του γραμμικού υποχώρου $\{f'(a)v \mid v \in \mathbb{R}^n\}$ είναι ίση με τον μέγιστο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα $f'(a)$.