

Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 13-3-2012.

1. [α] Έστω $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο A και επί του B , ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x = (x_1, x_2) \in A$, ότι η f' είναι συνεχής στο A και ότι $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $g : B \rightarrow A$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση, βρείτε την $g'(y)$ για κάθε $y = (y_1, y_2) \in B$ χωρίς να βρείτε τον τύπο της g . Κατόπιν, βρείτε τον τύπο της g και ελέγξτε τον τύπο της g' που βρήκατε προηγουμένως.

[β] Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ με τον ίδιο τύπο

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι επί του $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ αλλά όχι ένα-προς-ένα στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ότι η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ και ότι $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Παρατήρηση: Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ η f είναι ένα-προς-ένα αν περιοριστεί σε κάποιο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το σημείο x . Στο παράδειγμα αυτό η f δεν είναι ένα-προς-ένα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

2. Έστω $A = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_2 < 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο A και επί του B , ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x = (x_1, x_2) \in A$, ότι η f' είναι συνεχής στο A και ότι $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $g : B \rightarrow A$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση, βρείτε την $g'(y)$ για κάθε $y = (y_1, y_2) \in B$ χωρίς να βρείτε τον τύπο της g . Κατόπιν, βρείτε τον τύπο της g και ελέγξτε τον τύπο της g' που βρήκατε προηγουμένως.

[β] Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ με τον ίδιο τύπο

$$f(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι επί του $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ αλλά όχι ένα-προς-ένα στο $\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, ότι η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ και ότι $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$.

Παρατήρηση: Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ η f είναι ένα-προς-ένα αν περιοριστεί σε κάποιο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το σημείο x . Στο παράδειγμα αυτό η f δεν είναι ένα-προς-ένα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

3. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$f(x) = |x|^2 x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα και επί του $\mathbb{R}^n$ και ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και ότι $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και $\det f'(0) = 0$. Αν $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση, αποδείξτε ότι η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 χωρίς να βρείτε τον τύπο της και βρείτε την $g'(y)$ για

κάθε $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Κατόπιν, βρείτε τον τύπο της g και ελέγξτε τον τύπο της g' που βρήκατε προηγουμένως.

Μια πολύ γνωστή ειδική περίπτωση προκύπτει όταν $n = 1$. Περιγράψτε την.

4. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \rightarrow B$ ένα-προς-ένα και επί, οπότε υπάρχει $f^{-1} : B \rightarrow A$. Έστω ότι το a είναι εσωτερικό σημείο του A και το $b = f(a)$ είναι εσωτερικό σημείο του B .

[α] Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο b , αποδείξτε ότι

$$\det(f^{-1})'(b) \det f'(a) = 1.$$

Υπόδειξη: Ποιά είναι η συνάρτηση $f^{-1} \circ f$ και ποιός είναι ο πίνακας $(f^{-1})'(b)f'(a)$;

[β] Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a και $\det f'(a) = 0$, αποδείξτε ότι η f^{-1} δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο b .

- 5*. Έστω ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \rightarrow B$ η οποία είναι επί του συνόλου $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Αν η f' ορίζεται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχής στο A και ισχύει $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, αποδείξτε ότι το B είναι ανοικτό και ότι για κάθε ανοικτό $A_1 \subseteq A$ το $B_1 = f(A_1)$ είναι κι αυτό ανοικτό. Αν, επιπλέον, η f είναι ένα-προς-ένα στο A , οπότε υπάρχει $f^{-1} : B \rightarrow A$, αποδείξτε ότι η $(f^{-1})'$ ορίζεται σε κάθε σημείο του B και είναι συνεχής στο B .