

Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 20-3-2012.

1. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ στη μορφή $f(x, y_1, y_2)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ ώστε η f' να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^3$. Έστω $f(3, -1, 2) = (0, 0)$ και

$$f'(3, -1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου X είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε $3 \in X$ και $g(3) = (-1, 2)$ και

$$f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$$

για κάθε $x \in X$. Βρείτε την $g'(3)$. Πώς αλλάζουν τα προηγούμενα αν υποθέσουμε ότι

$$f'(3, -1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix};$$

2. Έστω $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ στη μορφή $f(x, y_1, y_2, x_2, x_3)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^5$ ώστε η f' να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^5$. Έστω $f(1, 2, -1, 3, 0) = (0, 0)$ και

$$f'(1, 2, -1, 3, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου X είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ ώστε $(1, 3, 0) \in X$ και $g(1, 3, 0) = (2, -1)$ και

$$f(x_1, g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3) = (0, 0)$$

για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in X$. Βρείτε την $g'(1, 3, 0)$.

3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ ώστε η f' να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ και έστω $f(2, -1) = -1$. Έστω

$$G(x, y, u) = f(x, y) + u^2, \quad H(x, y, u) = ux + 3y^3 + u^3.$$

Οι εξισώσεις $G(x, y, u) = 0$ και $H(x, y, u) = 0$ έχουν την λύση $(x, y, u) = (2, -1, 1)$. Ποιές συνθήκες σε σχέση με την f' εγγυούνται ότι υπάρχουν συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x = g(y)$ και $u = h(y)$ ορισμένες σε ένα ανοικτό υποσύνολο Y του $\mathbb{R}$, με $-1 \in Y$, οι οποίες ικανοποιούν τις $g(-1) = 2$ και $h(-1) = 1$ και τις

$$G(g(y), y, h(y)) = 0, \quad H(g(y), y, h(y)) = 0$$

για κάθε y στο Y ; Πέρα από αυτές τις κατάλληλες συνθήκες, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $f'(2, -1) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$, βρείτε τις $g'(-1)$ και $h'(-1)$.

4. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ με $F(0, 0) = 0$ και $F'(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$. Έστω $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(x, y, z) = F(x + 2y + 3z - 1, x^3 + y^2 - z^2).$$

και παρατηρήστε ότι $G(-2, 3, -1) = F(0, 0) = 0$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$G(x, y, z) = 0$$

μπορεί να λυθεί ως προς z ως συνάρτηση $z = g(x, y)$ του (x, y) σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο περιέχει το σημείο $(-2, 3)$, έτσι ώστε $g(-2, 3) = -1$. Βρείτε την $g'(-2, 3)$. Αν $D_1(D_1F)(0, 0) = 3$, $D_1(D_2F)(0, 0) = -1$ και $D_2(D_2F)(0, 0) = 5$, βρείτε την $D_2(D_1g)(-2, 3)$.