Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Ασκήσεις, 26-3-2012.

1. Έστω $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x_1 < \frac{1}{2},\ 0 \le x_2 \le 1 \\ 1, & \text{αν } \frac{1}{2} \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1] \times [0,1]$ και ότι $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = \frac{1}{2}$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη διαμέριση $\Delta = \{S_1, S_2, S_3\}$, όπου $S_1 = [0, \frac{1}{2} - \varepsilon] \times [0,1]$, $S_2 = [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}] \times [0,1]$, $S_3 = [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$. Υπολογίστε τα $\overline{\Sigma}(f,\Delta)$, $\underline{\Sigma}(f,\Delta)$ και τη διαφορά τους και χρησιμοποιήστε το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann. Τέλος, θυμηθείτε ότι $\overline{\Sigma}(f,\Delta) \le \int_{[0,1]\times[0,1]} f \le \underline{\Sigma}(f,\Delta)$.

2. Μιμηθείτε τις αποδείξεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων για συναρτήσεις μιας μεταβλητής για να αποδείξετε τα παρακάτω.

Έστω κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και φραγμένες συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$.

[α*] Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο A, τότε η $f+g : A \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο A και

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g.$$

[β*] Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε η $\lambda f : A \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο A και

$$\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f.$$

[γ*] Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο A, τότε η $fg : A \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο A.

[δ*] Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο A και $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε

$$\int_A f \le \int_A g.$$

[ε*] Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, τότε η $|f| : A \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο A και

$$\left| \int_A f \right| \le \int_A |f|.$$

[στ*] Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο A και $B \subseteq A$ είναι κι αυτό κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B.

[ζ**] Έστω οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{S_1, \dots, S_N\}$ του A. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από τα $S_1, \dots, S_N$, αποδείξτε ότι είναι ολοκληρώσιμη στο A και

$$\int_A f = \int_{S_1} f + \cdots + \int_{S_N} f.$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε το αποτέλεσμα πρώτα στην περίπτωση που η διαμέριση προκύπτει από ένα μόνο διαιρετικό σημείο μιας μόνο από τις ακμές του A (οπότε η διαμέριση αποτελείται από δυο μόνο υποορθογώνια του A). Κατόπιν εφαρμόστε κατάλληλα την αρχή της επαγωγής.

3. Αποδείξτε ότι, αν το $A \subseteq \mathbb{R}^n$ έχει περιεχόμενο μηδέν, τότε το A είναι φραγμένο.

4*. Αποδείξτε ότι το

$$A = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \,|\, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ότι έχει μέτρο μηδέν. Παρατηρήστε ότι το A δεν είναι φραγμένο, οπότε, σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, δεν έχει περιεχόμενο μηδέν.

5*. [α] Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και έστω $\mathrm{bd}(A)$ το σύνολο των συνοριακών σημείων του A. Αν το A έχει περιεχόμενο μηδέν, αποδείξτε ότι και το $\mathrm{bd}(A)$ έχει περιεχόμενο μηδέν.

Υπόδειξη: Έστω κλειστά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_N$ ώστε $A \subseteq \overline{U}_1 \cup \cdots \cup \overline{U}_N$. Αποδείξτε ότι $\mathrm{bd}(A) \subseteq \overline{U}_1 \cup \cdots \cup \overline{U}_N$.

[β.] Θεωρήστε το σύνολο

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, n\} \subseteq [0,1] \times \cdots \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Το A είναι αριθμήσιμο, οπότε έχει μέτρο μηδέν. Αποδείξτε ότι το A δεν έχει περιεχόμενο μηδέν και ότι (ενώ το A έχει μέτρο μηδέν) το $\mathrm{bd}(A)$ δεν έχει μέτρο μηδέν.

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\mathrm{bd}(A) = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$.

6. Αποδείξτε ότι το κενό σύνολο $\emptyset$ έχει (ως υποσύνολο οποιουδήποτε $\mathbb{R}^n$) μέτρο μηδέν και περιεχόμενο μηδέν.