Το πρώτο μάθημα.

Συμβολίζουμε

$$x = (x_1, \dots, x_n) \qquad \text{ή} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$. Θα προτιμάμε το δεύτερο σύμβολο όταν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε διάνυσμα με πίνακα.

Μας είναι γνωστή η διπλή φύση των στοιχείων του $\mathbb{R}^n$. Κάθε $x = (x_1, \dots, x_n)$ θεωρείται είτε ως σημείο είτε ως διάνυσμα με αρχή το $0 = (0, \dots, 0)$.

Η (ευκλείδεια) νόρμα του $x = (x_1, \dots, x_n)$ είναι ο μη-αρνητικός αριθμός

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

Το (ευκλείδειο) εσωτερικό γινόμενο των $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ είναι ο αριθμός

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n\,.$$

Οι βασικές ιδιότητες της νόρμας και του εσωτερικού γινομένου είναι γνωστές. Οι πιο σημαντικές είναι η **τριγωνική ανισότητα**

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

και η **ανισότητα του Cauchy**

$$|\langle x, y\rangle| \le |x||y|.$$

Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, η $|x - y|$ είναι η (ευκλείδεια) απόσταση των σημείων x και y.

Ορισμός 1. *Η* **ανοικτή μπάλα** *και η* **κλειστή μπάλα** *στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο $x \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνα $r > 0$ είναι τα σύνολα*

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x - a| < r\} \qquad \text{και} \qquad \overline{B}(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x - a| \le r\}.$$

Ανοικτά ορθ. παραλληλεπίπεδα *και* **κλειστά ορθ. παραλληλεπίπεδα** *στον $\mathbb{R}^n$ είναι τα σύνολα*

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, a_1 < x_1 < b_n, \dots, a_n < x_n < b_n\}$$

και

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, a_1 \le x_1 \le b_n, \dots, a_n \le x_n \le b_n\}.$$

Ορισμός 2. *Ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ χαρακτηρίζεται* **ανοικτό** *αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει $r = r(x) > 0$ ώστε $B(x; r) \subseteq U$.*

Παραδείγματα.

1. Είναι προφανές ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

2. Το $\emptyset$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Διότι δεν μπορούμε να βρούμε κανένα $x \in \emptyset$ το οποίο να μην ικανοποιεί την ιδιότητα που αναφέρεται στον ορισμό του ανοικτού συνόλου.

3. Μια ανοικτή μπάλα $B(a; r)$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό σύνολο.
Πράγματι, έστω $x \in B(a; r)$. Τότε $|x - a| < r$ και ορίζουμε $r' = r - |x - a| > 0$. Τότε για κάθε $y \in B(x; r')$ είναι $|y - a| \le |y - x| + |x - a| < r' + |x - a| = r$, οπότε $y \in B(a; r)$. Άρα $B(x; r') \subseteq B(a; r)$.

3. Ένα ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό σύνολο. Δείτε το μόνοι σας.

Ορισμός 3. *Ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}^n$ χαρακτηρίζεται* **κλειστό** *αν το συμπλήρωμά του $\mathbb{R}^n \setminus F$ είναι ανοικτό.*

Παραδείγματα.

1. Ο $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ διότι το συμπλήρωμά του είναι το $\emptyset$.

2. Το $\emptyset$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ διότι το συμπλήρωμά του είναι ο $\mathbb{R}^n$.

3. Μια κλειστή μπάλα $\overline{B}(a;r)$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό σύνολο.

Πράγματι, $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x-a| > r\}$. Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a;r)$. Τότε $|x-a| > r$ και ορίζουμε $r' = |x-a| - r > 0$. Τότε για κάθε $y \in B(x;r')$ είναι $|y-a| \geq |x-a| - |y-x| > |x-a| - r' = r$, οπότε $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a;r)$. Άρα $B(x;r') \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a;r)$. Άρα το $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a;r)$ είναι ανοικτό.

3. Ένα κλειστό ορθ. παραλληλεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό σύνολο. Δείτε το μόνοι σας.

Ορισμός 4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$.*
Το x χαρακτηρίζεται **εσωτερικό σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(x;r) \subseteq A$ ή, ισοδύναμα, $B(x;r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset$.*
Το x χαρακτηρίζεται **εξωτερικό σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(x;r) \cap A = \emptyset$ ή, ισοδύναμα, $B(x;r) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)$.*
Το x χαρακτηρίζεται **συνοριακό σημείο** *του A αν για κάθε $r > 0$ είναι $B(x;r) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x;r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.*

Παρατηρήστε ότι:

(i) Κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ είναι είτε εσωτερικό είτε εξωτερικό είτε συνοριακό σημείο του A. Επίσης, δεν μπορεί ένα x να είναι εσωτερικό και εξωτερικό ή εσωτερικό και συνοριακό ή εξωτερικό και συνοριακό σημείο του A.

(ii) Τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εξωτερικά σημεία του $\mathbb{R}^n \setminus A$ και τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εσωτερικά σημεία του $\mathbb{R}^n \setminus A$. Τέλος, τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του $\mathbb{R}^n \setminus A$.

(iii) Τα εσωτερικά σημεία του A περιέχονται όλα στο A και τα εξωτερικά σημεία του A περιέχονται όλα στο $\mathbb{R}^n \setminus A$. Επίσης, κάποια από τα συνοριακά σημεία του A μπορεί να ανήκουν στο A και τα υπόλοιπα συνοριακά σημεία του A θα ανήκουν στο $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Παράδειγμα.

Έστω $A = B(a;r)$ ή $A = \overline{B}(a;r)$. Αν $|x-a| < r$, το x είναι εσωτερικό σημείο του A. Αν $|x-a| > r$, το x είναι εξωτερικό σημείο του A. Αν $|x-a| = r$, το x είναι συνοριακό σημείο του A.

Άρα, αν $A = B(a;r)$, το A περιέχει μόνο τα εσωτερικά του σημεία και κανένα συνοριακό του σημείο. Αντιθέτως, αν $A = \overline{B}(a;r)$, το A περιέχει όλα τα εσωτερικά και όλα τα συνοριακά του σημεία.

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το $A = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x-a| < r\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x-a| = r, x_1 > 0\}$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Δηλαδή, στην ανοικτή μπάλα $B(a;r)$ επισυνάπτουμε τα επιφανειακά της σημεία με θετική πρώτη συντεταγμένη. Τώρα, όπως πριν, αν $|x-a| < r$, το x είναι εσωτερικό σημείο του A. Αν $|x-a| > r$, το x είναι εξωτερικό σημείο του A. Αν $|x-a| = r$, το x είναι συνοριακό σημείο του A. Άρα, το A περιέχει τα εσωτερικά του σημεία και κάποια, αλλά όχι όλα, από τα συνοριακά του σημεία.

Πρόταση 1. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*
1. Το U είναι ανοικτό αν και μόνο αν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό του σημείο.
2. Το U είναι ανοικτό αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο.

Πρόταση 2. *Έστω $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Το F είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.*