Βασικές γνώσεις από γραμμική άλγεβρα.

Ξαναθυμηθείτε τα παρακάτω.

1. Η ευκλείδεια νόρμα και το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ και οι βασικές ιδιότητές τους.
2. Η συνήθης ορθογώνια βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$:
$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad , \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}.$$
3. Γενικότερες βάσεις στον $\mathbb{R}^n$.
4. Γραμμικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$. Βάση γραμμικού υπόχωρου. Διάσταση γραμμικού υπόχωρου.
5. Ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ μπορεί να επεκταθεί με επισύναψη και άλλων στοιχείων και να γίνει βάση του $\mathbb{R}^n$.
6. Ορθογωνιότητα διανυσμάτων και γραμμικών υποχώρων.
7. Γραμμικοί μετασχηματισμοί $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, όπου $y = T(x)$ με $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^m$:
$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2), \quad T(\lambda x) = \lambda T(x) \qquad \text{για κάθε } x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$
8. Ορθογώνιοι μετασχηματισμοί (αυτοί που αφήνουν αναλλοίωτο το εσωτερικό γινόμενο ή, ισοδύναμα, αυτοί που αφήνουν αναλλοίωτη τη νόρμα).
9. Πυρήνας γραμμικού μετασχηματισμού: $\ker T = T^{-1}(\{0\})$.
   Εικόνα γραμμικού μετασχηματισμού: $\operatorname{Im} T = T(\mathbb{R}^n)$.
   Ο T είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν $\ker T = \{0\}$.
   Ο T είναι επί του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^m$.
10. $T(\text{γραμμικού υπόχωρου του}\, \mathbb{R}^n) = \text{γραμμικός υπόχωρος του}\, \mathbb{R}^m$.
    $T^{-1}(\text{γραμμικού υπόχωρου του}\, \mathbb{R}^m) = \text{γραμμικός υπόχωρος του}\, \mathbb{R}^n$.
11. Ο $m \times n$ πίνακας A γραμμ. μετασχηματισμού $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:
$$(y_1, \dots, y_m) = T(x_1, \dots, x_n) \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$
    Οι στήλες του πίνακα A είναι τα διανύσματα $T(e_1), \dots, T(e_n)$.
12. Η τάξη $r(T)$ του γραμμ. μετασχηματισμού T ορίζεται ως η διάσταση του $\operatorname{Im} T$
$$r(T) = \dim \operatorname{Im} T = \dim T(\mathbb{R}^n).$$
    Η τάξη $r(A)$ του αντίστοιχου πίνακα A ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός γραμμ. ανεξάρτητων στηλών του A και ως ο μέγιστος αριθμός γραμμ. ανεξάρτητων γραμμών του A (οι δυο αριθμοί είναι ίσοι).
    Ισχύει ότι η τάξη του γραμμ. μετασχηματισμού T είναι ίση με την τάξη του αντίστοιχου πίνακα A :
$$\begin{aligned} r(T) = r(A) &= \text{ο μέγιστος αριθμός γραμμ. ανεξάρτητων στηλών του}\, A \\ &= \text{ο μέγιστος αριθμός γραμμ. ανεξάρτητων γραμμών του}\, A. \end{aligned}$$

Ορίζεται ο $n(T)$ ως η διάσταση του $\ker T$

$$n(T) = \dim \ker T = \dim T^{-1}(\{0\}).$$

Ισχύει

$$n(T) + r(T) = n.$$

13. Ο δυικός χώρος του $\mathbb{R}^n$ είναι ισομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$.

Ίσως χρειαστεί να λύσετε μερικές ασκήσεις σχετικές με την ορθογωνιότητα διανυσμάτων και υποχώρων και μερικές ασκήσεις για ορθογώνιους μετασχηματισμούς και πίνακες. Θα φροντίσω γι αυτό. Ελπίζω η έννοια του δυικού χώρου να μην είναι τελείως σκοτεινό σημείο. Η τρόικα απαιτεί όλοι οι έλληνες να παίζουν τους δυικούς χώρους στα δάχτυλα (είναι, λέει, θέμα βασικού μισθού).