

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Παραδώστε τις λύσεις σας μέχρι την Πέμπτη 30 Οκτωβρίου.

1. Έστω ανοικτό, συνεκτικό $A \subseteq \mathbb{C}$ και $B \subseteq A$ ώστε κάθε σημείο του B είναι μεμονωμένο σημείο του B . Αποδείξτε ότι το $A \setminus B$ είναι συνεκτικό.

2. Λέμε ότι τα z, w είναι **συμμετρικά** ως προς τον κύκλο $\mathbb{T}$ αν είτε $z = 0, w = \infty$ είτε $z = \infty, w = 0$ είτε $z, w \in \mathbb{C}, z = \frac{1}{\bar{w}}$.

Έστω ρητή συνάρτηση $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ με P, Q ανάγωγα πολυώνυμα. Υποθέτουμε ότι η R δεν είναι σταθερή και ότι

$$|z| = 1 \Rightarrow |R(z)| = 1.$$

Αποδείξτε ότι, αν το $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι ρίζα τάξης k του $P(z)$, τότε το $b = \frac{1}{\bar{a}}$ είναι ρίζα τάξης k του $Q(z)$ και, αντιστρόφως, αν το $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι ρίζα τάξης k του $Q(z)$, τότε το $a = \frac{1}{\bar{b}}$ είναι ρίζα τάξης k του $P(z)$. Άρα οι ρίζες του $P(z)$ σχηματίζουν με τις ρίζες του $Q(z)$ ζεύγη συμμετρικά ως προς τον $\mathbb{T}$.

3. (α) Ελέγξτε την παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων $|z|^2, |z|, \operatorname{Re} z$ και $\operatorname{Im} z$ στα σημεία του $\mathbb{C}$.

(β) Αποδείξτε ότι η

$$G(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy - Riemann στο 0, ότι το $\frac{G(z) - G(0)}{z}$ έχει όριο όταν το z τείνει στο 0 πάνω σε οποιαδήποτε ευθεία που περιέχει το 0, αλλά ότι η G δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Έστω $f = u + iv$, όπου οι u, v είναι πραγματικές συναρτήσεις $\mathbb{R}$ -παραγωγίσιμες στο z_0 . Αποδείξτε ότι:

(α) αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 .

(β) αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|,$$

τότε είτε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 είτε η $\bar{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 .

5. Έστω ανοικτό, συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και f αναλυτική στο Ω . Έστω ότι υπάρχει ευθεία L ώστε: $f(z) \in L$ για κάθε $z \in \Omega$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω . Τι συμβαίνει αν, αντί για ευθεία L , υποθέσουμε ότι υπάρχει κύκλος C ώστε: $f(z) \in C$ για κάθε $z \in \Omega$;

6. Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Ορίζουμε

$$\Omega^* = \{z \mid \bar{z} \in \Omega\}$$

και $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $z_0 \in \Omega$, τότε η f^* είναι παραγωγίσιμη στο $\overline{z_0} \in \Omega^*$.

7. Έστω $z_0 \in \mathbb{D}$.

(α) Έστω $|\lambda| = 1$. Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Möbius $S(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ απεικονίζει τον κύκλο $\mathbb{T}$ στον εαυτό του και το z_0 στο 0.

(β) Αποδείξτε ότι αν ο μετασχηματισμός Möbius S απεικονίζει τον κύκλο $\mathbb{T}$ στον εαυτό του και το z_0 στο 0, τότε υπάρχει λ με $|\lambda| = 1$ ώστε $S(z) = \lambda \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$.

(γ) Έστω $a, b \in \mathbb{D}$. Αποδείξτε ότι ο πιο γενικός μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει τον κύκλο $\mathbb{T}$ στον εαυτό του και το a στο b είναι ο $T(z) = w$, όπου $\frac{w-b}{1-\overline{b}w} = \lambda \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ για κάποιο λ με $|\lambda| = 1$.

8. (α) Έστω ευθεία L και δυο σημεία a, b της L . Ορίζουμε για κάθε $z \in \mathbb{C}$ το **συμμετρικό** του σημείου ως προς την L με τον τύπο

$$z^* = b + \frac{b-a}{b-\overline{a}}(\overline{z} - \overline{b}).$$

Επίσης ορίζουμε

$$\infty^* = \infty.$$

Αποδείξτε ότι ο ορισμός είναι καλός (δηλαδή, δεν εξαρτάται από τα $a, b \in L$). Ποιά είναι η γεωμετρική σχέση ανάμεσα στα z, z^* ;

(β) Έστω κύκλος $C(z_0; R)$. Ορίζουμε για κάθε $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ το **συμμετρικό** του σημείου ως προς τον κύκλο με τον τύπο

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}.$$

Ποιά είναι η γεωμετρική σχέση ανάμεσα στα z, z^* ;

(γ) Αν ο S είναι μετασχηματισμός Möbius, C_1, C_2 είναι γενικευμένοι κύκλοι και ο S απεικονίζει τον C_1 στον C_2 , αποδείξτε ότι κάθε ζευγάρι z, z^* συμμετρικών ως προς τον C_1 σημείων απεικονίζεται σε ζευγάρι $S(z), S(z^*)$ συμμετρικών ως προς τον C_2 σημείων.

9. (α) Αν ισχύει τελικά $a_n \neq 0$ και αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R .

(β) Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^a z^n \quad (a > 0), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n,$$

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot c(c+1) \cdots (c+n-1)} z^n \quad (c \neq 0, -1, -2, \dots).$$

Η τελευταία δυναμοσειρά ονομάζεται *υπεργεωμετρική σειρά* με παραμέτρους a, b, c .

10. Αποδείξτε ότι, αν δυο δυναμοσειρές του τύπου $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με θετικές ακτίνες σύγκλισης ορίζουν την ίδια συνάρτηση στην τομή των δίσκων σύγκλισής τους, τότε οι δυναμοσειρές είναι ίδιες (δηλαδή, έχουν τα ίδια αντίστοιχα a_n). Αποδείξτε το ίδιο για δυο δυναμοσειρές του τύπου $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(z-z_0)^n}$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί κάτι τέτοιο για δυο δυναμοσειρές του τύπου $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$;

11. (α) Γράψτε την $\frac{1}{z-1}$ ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης τον $D(0; 1)$ και ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης τον $D(0; 1, +\infty) \cup \{\infty\}$.
 (β) Γράψτε την $\frac{1}{(z-3)(z-4)}$ ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0; 3, 4)$.

12. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$ συγκλίνει για κάθε z στο ημιεπίπεδο $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του ημιεπιπέδου αυτού.

13. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ και ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο $K \setminus \mathbb{Z}$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{C}$.

14. Έστω $a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $s_n = \sum_{k=1}^n z_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Διαβάστε τις αποδείξεις των δυο γνωστών κριτηρίων σύγκλισης:

Κριτήριο του Dirichlet: Αν η (s_n) είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$ και $a_n \rightarrow 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει.

Κριτήριο του Abel: Αν η (s_n) συγκλίνει στο $\mathbb{C}$ (δηλαδή, η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει) και η (a_n) είναι κάτω φραγμένη στο $\mathbb{R}$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει.

Το κριτήριο του Abel είναι συνέπεια του κριτηρίου του Dirichlet. Το κριτήριο του Dirichlet αποδεικνύεται με χρήση του τύπου άθροισης κατά μέρη:

$$a_m z_m + \cdots + a_n z_n = a_n s_n - a_m s_{m-1} + (a_m - a_{m+1}) s_m + \cdots + (a_{n-1} - a_n) s_{n-1},$$

όπου $2 \leq m < n$.

(α) Βρείτε τα $z \in \mathbb{T}$ για τα οποία η $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ συγκλίνει και τα $z \in \mathbb{T}$ για τα οποία η $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα.

(β) Για κάθε $a > 0$ βρείτε τα $z \in \mathbb{T}$ για τα οποία η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^a}$ συγκλίνει.

15. Έστω $a < b$ και ο μετασχηματισμός Möbius $w = S(z) = \frac{z-ia}{z-ib}$.

(α) Αποδείξτε ότι ο S απεικονίζει το ημιεπίπεδο $\operatorname{Re} z > 0$ αμφιμονοσήμαντα στο ημιεπίπεδο $\operatorname{Re} w > 0$.

(β) Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο του αριθμού $\operatorname{Log} S(z)$ όταν $\operatorname{Re} z > 0$;

16. Έστω συνεκτικό $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αν f_1 και f_2 είναι δυο (διαφορετικοί) συνεχείς κλάδοι του $\log$ στο A , αποδείξτε ότι $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$. (Παρατηρήστε πώς αυτό επιβεβαιώνεται στην περίπτωση $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι μια ημιευθεία με κορυφή το 0.)